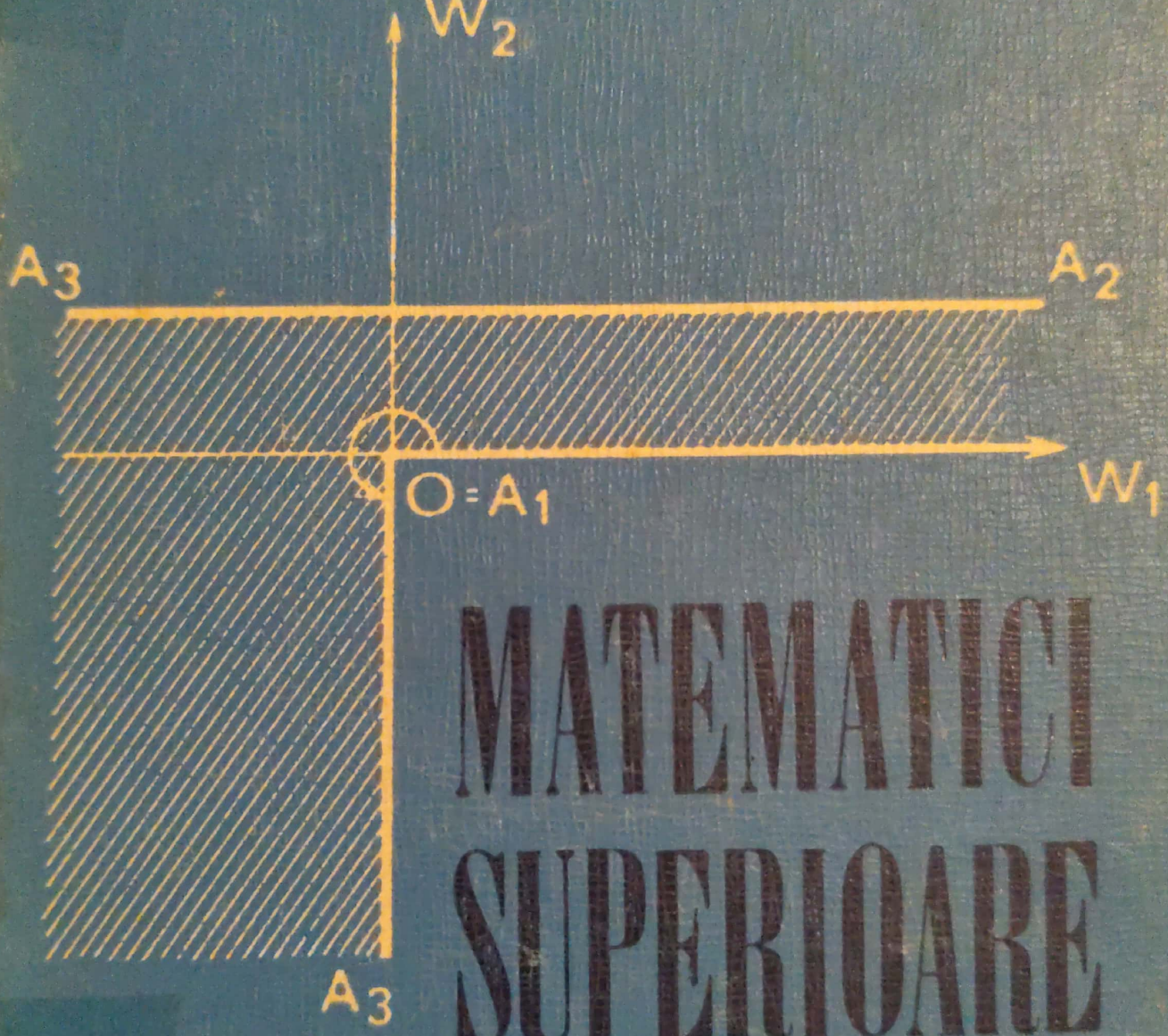
RODICA TRANDAFIR



MATEMATICI SUPERIOARE

EDITURA FACLA

Scanned with OKEN Scanner

RODICA TRANDAFIR

MATEMATICI SUPERIOARE

EDITURA FACLA — 1976

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Culegerea de față reprezintă înmănuncherea unor probleme de matematici superioare ce se adresează celor ce au deja la bază o anumită pregătire matematică: studenților de la facultățile de fizică, de subingineri, celor de la institutele economice, pedagogice, precum și unor specialiști din domeniul producției industriale etc. Ea reprezintă un îndreptar util pentru aprofundarea cunoștințelor predate la cursurile de matematici.

Lucrarea conține probleme complet rezolvate, grupate în șase capitole. Fiecare capitol este precedat de o parte introductivă care face un rezumat al principalelor definiții și teoreme utilizate în rezolvarea problemelor, cititorul avînd astfel la îndemînă instrumentul teoretic de rezolvare.

Principalele lucrări consultate sînt trecute în bibliografia de la sfîrșitul cărții, pe care o recomandăm pentru completarea cunoștințelor necesare.

AUTOAREA

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 1.

ALGEBRĂ LINIARĂ

Fie un corp K dat. Elementele lui le vom numi scalari.

Definiţie. O mulţime nevidă E se numeşte spaţiu liniar sau afin peste corpul K dacă :

I. există pe E o lege de compoziţie internă, notată aditiv faţă de care E formează un grup abelian ;

II. există o lege de compoziţie externă faţă de care sînt satisfăcute axiomele :

1. $x \in E$ şi $d \in K \Rightarrow \alpha x \in E$,
2. $x \in E$ şi $e \in K \Rightarrow ex = x$, ($e$=elem. neutru la
3. $x \in E$ şi $\alpha, \beta \in K \Rightarrow (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$, înmulţirea în K).
4. $x \in E$ şi $\alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
5. $x, y \in E$ şi $\alpha \in K \Rightarrow \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Un spaţiu liniar se mai numeşte şi spaţiu vectorial iar elementele lui le vom numi vectori.

Definiţie. Fie E un spaţiu liniar. Orice submulţime ($E_1 \subseteq E$) a lui E care este ea însăşi un spaţiu liniar faţă de operaţiile din E, se numeşte subspaţiu liniar al lui E.

Un sistem de vectori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, este liniar dependent dacă există în corpul K numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, nu toate nule, astfel ca

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \theta. \quad (\theta = \text{vectorul nul})$$

Dacă din $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \theta$ rezultă $\alpha_i = 0$, $(\forall)\ i = 1, 2, \ldots, n$ atunci sistemul de vectori este liniar independent.

Scanned with OKEN Scanner

Vectorul $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ se spune că este o combinație liniară de vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Definiție. Un spațiu liniar E se zice că este de dimensiune n dacă în el există n vectori liniar independenți iar $n+1$ vectori sînt totdeauna liniar dependenți.

Un sistem de n vectori liniar independenți dintr-un spațiu n — dimensional E formează o *bază* a lui E.

Dacă vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_n$ constituie o bază a spațiului, atunci orice vector $x \in E$ este de forma $x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i$, iar $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ se numesc coordonatele lui x în baza dată.

Numim intersecția subspațiilor E_1 și E_2 ale spațiului liniar E mulțimea D formată din vectorii comuni acestor subspații.

Numim suma subspațiilor E_1 și E_2 mulțimea S formată din vectorii $x = x_1 + x_2$, cu $x_1 \in E_1$ și $x_2 \in E_2$. Notăm $D = E_1 \cap E_2$ și $S = E_1 + E_2$.

Avem $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim S + \dim D$.

Dacă $E_1 \cap E_2 = 0$, atunci subspațiul S se numește *suma directă* a celor două subspații. Notăm $S = E_1 \oplus E_2$.

Se numește *produs scalar* în spațiu liniar (real sau complex) o funcție numerică de două variabile x, y așa încît

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$$

$$\langle \alpha x_1 + \alpha x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1, y\rangle + \alpha\langle x_2, y\rangle.$$

Dacă $\langle x, y\rangle = 0$ vectorii x, y se zic ortogonali

Fie spațiul liniar E/K. Numim *formă liniară* o funcție $f : E \to K$, așa încît:

1° $f(x+y) = f(x) + f(y)$

2° $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Fie două spații liniare $E/K, F/K$.

Numim *formă biliniară* o funcție $A(x, y)$, $x \in E$, $y \in F$ liniară atît în argumentul x cît și în y.

Dacă $u_1, u_2, \ldots, u_n$, este o bază în E și $v_1, v_2, \ldots, v_m$, o bază în F

$$A(x, y) = \alpha_{ij}\xi^i\eta^j, \quad \alpha_{ij} = A(u_i, v_j), \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Matricea

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

se numește matricea formei biliniare în bazele date.

Dată o formă biliniară în spațiile E, F, există în aceste spații baze așa încît matricea formei biliniare să se reducă la o matrice diagonală. În aceste baze forma biliniară se scrie sub forma canonică

$$A(x, y) = \alpha_i \xi^i \eta^i.$$

Dacă $A(x, y) = A(y, x)$ forma biliniară este simetrică, iar dacă $A(x, y) = -A(y, x)$ forma biliniară este antisimetrică.

Numim *formă pătratică* într-un spațiu liniar E/K funcția $A(x, x)$. Deci unei forme biliniare simetrice i se poate atașa o funcție scalară de un argument notată prin $A(x)$

$$A(x) = \alpha_{ij} \xi^i \xi^j.$$

Fie $A(x)$ o formă pătratică nesingulară ($\det(\alpha_{ij}) \neq 0$). Se pot găsi baze în E astfel ca minorii principali ai matricei (α_{ij}) să fie toți diferiți de zero. Într-o astfel de bază avem

$$A(x) = \sum_k \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} (\xi^k)^2,$$

unde :

$$\Delta_1 = \alpha_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \dots$$

$$\dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

Acesta este procedeul lui Jacobi de reducere la forma canonică a unei forme pătratice.

Scanned with OKEN Scanner

Numim operator liniar pe spaţiul liniar E/K (transformarea liniară a spaţiului E) o aplicaţie A a spaţiului E în el însuşi aşa încît

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay,$$

pentru orice $\alpha, \beta \in K$, $x, y \in E$.

Dacă A_1 şi A_2 sînt operatori liniari pe acelaşi spaţiu liniar avem

$$(A_1 + A_2)x = A_1x + A_2x, \quad (\forall)\ x \in E$$

$$(\alpha A_1)x = \alpha(A_1x), \qquad \alpha \in K$$

$$(A_1A_2)x = A_1(A_2x).$$

Fie $u_1, u_2, \ldots, u_n$ o bază oarecare în E şi A un operator definit în E. Avem

$$Au_k = \alpha_k^i u_i, \quad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Matricea $A = (\alpha_k^i)$ se numeşte matricea operatorului A în baza $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Dacă trecem de la baza $u_1, u_2, \ldots, u_n$ la baza $v_1, v_2, \ldots, v_n$, trecere definită cu ajutorul matricei $T = (\lambda_h^l)$, $(h, l = 1, \ldots, n)$, matricea B a operatorului A în baza $v_1, v_2, \ldots, v_n$ va fi

$$B = TAT^{-1}.$$

Mulţimea matricelor care reprezintă acelaşi operator liniar în toate bazele formează o clasă de matrici numite asemenea.

Se numeşte *subspaţiu invariant* faţă de operatorul liniar A un subspaţiu E_1 al lui E cu proprietatea că dacă $x \in E_1$, atunci $Ax \in E_1$.

Numim polinom caracteristic al operatorului liniar A polinomul $f(\lambda) = \det(A' - \lambda I)$, iar ecuaţia $\det(\lambda I - A') = 0$, ecuaţie caracteristică.

Rădăcinile ecuaţiei caracteristice se numesc *valori proprii* ale operatorului liniar, iar soluţiile nebanale ale sistemului

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^j - \delta_i^j \lambda)\xi^i = 0, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

se numesc vectorii proprii corespunzători valorilor proprii respective.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME

1.1. Să se determine rangul matricelor:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$,

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & a \end{pmatrix}$,

3. $A = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 2 & \lambda^2 + 1 & 2\lambda^2 - 2 \\ \lambda^2 + 1 & \lambda^2 + 1 & 2\lambda^2 - 2 \\ \lambda^2 + 2 & \lambda^2 + 1 & 3\lambda^2 - 5 \end{pmatrix}$, $\lambda \in K$.

1.2. Să se scrie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

ca un produs de două matrice triunghiulare.

1.3. Să se calculeze:

1. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^n$; 2. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n$.

1.4. Să se determine matricele pătratice reale de ordin doi care ridicate la puterea a treia ne dau matricea unitate (matrice idempatente de indice trei).

Scanned with OKEN Scanner

1.5. Fie dată matricea nesingulară A și A^c complementara sa (matricea ale cărei elemente sînt minorii de ordinul $n-1$ ai matricei A în ordine naturală). Să se arate că

$$(A^c)^c = \Delta^{n-2}A, \quad \Delta = \det A.$$

1.6. Dată o matrice pătratică A de ordin m, să se arate că există un polinom $P(x)$ așa încît $P(A) = 0$ și toate polinoamele cu această proprietate au un divizor comun.

1.7. Să se rezolve ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

1.8. Se consideră sistemul matriceal:

$$AX + BY = C$$
$$A_1X + B_1Y = C_1,$$

unde A_1, B, C, A_1, B_1, C_1 sînt matrice pătrate date, și se cere:

1. să se determine condiția ca sistemul să admită o soluție unică;

2. să se rezolve sistemul în cazul în care:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.9. Utilizînd *teorema Cayley-Hamilton* să se calculeze inversele matricelor:

1. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; **2.** $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

1.10. Să se studieze dependența liniară a sistemelor de vectori :

1. $x_1 = (2, -1, 5, -6)$; $x_2 = (2, 1, 11, 2)$;
   $x_3 = (1, 0, 4, -1)$; $x_4 = (11, 4, 56, 5)$.
2. $x_1 = (1, 0, 1, 0, 0,)$; $x_2 = (1, 1, 0, 0, 0)$;
   $x_3 = (0, 1, 1, 0, 0)$; $x_4 = (0, 0, 1, 1, 0)$;
   $x_5 = (0, 0, 0, 1, 1)$.
3. $x_1 = (2, -1, 2, 1)$, $x_2 = (2, 3, -1, 2)$,
   $x_3 = (5, -9, 8, -1)$

1.11. În spațiul real R^4 considerăm sub spațiul vectorial generat de vectorii :

$x_1 = (0, 1, 0, 1, 0)$; $x_2 = (2, 1, 0, 2, 1)$;
$x_3 = (2, 0, 2, 0, 2)$; $x_4 = (1, 1, 0, 1, 0)$.

Să se determine baza și dimensiunea sa.

1.12. Să se determine baza și dimensiunea spațiului vectorial generat de vectorii :

$x_1 = (1, -1, 2, 3)$; $x_2 = (0, 1, -2, 4)$;
$x_3 = (1, -1, 2, -2)$; $x_4 = (-2, 0, 1, 0)$.

1.13. Să se arate că în spațiul vectorial cu patru componente reale (a_1, a_2, a_3, a_4), vectorii care verifică relația $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$, formează un subspațiu cu trei dimensiuni. Să se determine o bază a acestui subspațiu.

1.14. Fie R^4 spațiul vectorilor cu patru componente reale (a_1, a_2, a_3, a_4) și H subspațiul său vectorial pentru care

$$a_1 = a_2 - 3a_3, \quad a_3 = 2a_4.$$

Să se determine o bază a lui H și să se completeze această bază pînă la o bază în R^4.

1.15. Să se determine baza și dimensiunea sumei și intersecției subspațiilor lui R^4 generate de vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_k$ și $y_1, y_2, \ldots, y_l$.

1. $x_1 = (1, -1, 2, 0)$, $y_1 = (-1, 0, 2, 1)$,
   $x_2 = (2, 1, 0, 1)$, $y_2 = (-1, 3, 1, 5)$.

Scanned with OKEN Scanner

2. $x_1 = (1, -1, 2, 0)$, $y_1 = (5, 2, -5, -2)$,
$x_2 = (1, -1, 1, 1,)$, $y_2 = (1, -1, 0, 2)$.
$x_3 = (3, 1, 0, -1)$,

3. $x_1 = (1, 0, 1, 0)$, $y_1 = (0, 1, 0, 1)$,
$x_2 = (1, 1, 0, 1)$, $y_2 = (0, 1, 1, 0)$.

1.16. Dacă spaţiul liniar E se scrie ca sumă directă de subspaţii : $E = E_1 \oplus E_2$ şi $E = E_1' \oplus E_2'$ să se arate că

1. $\dim E_2 = \text{codim. } E_1$

2. $\text{codim. } (E_1 \cap E_1') \leqslant \dim E_2 + \dim E_2'$.

1.17. Fie spaţiul vectorial $\mathfrak{M}_2$ al matricilor pătrate de ordin 2 cu coeficienţi în corpul K. Se cere :

1. Dimensiunea acestui spaţiu.

2. Să se determine o bază a sa.

3. Să se arate că mulţimea matricilor M de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ formează un spaţiu vectorial $\mathfrak{M}_2'$ al lui $\mathfrak{M}_2$.

4. Se cere dimensiunea lui $\mathfrak{M}_2'$ şi o bază a sa.

1.18. Să se determine coordonatele vectorilor $x_1 = (1, 0, 2)$ şi $x_2 = (2, 0, 5)$ în baza $e_1 = (3, 1, 5)$, $e_2 = (3, 6, 2)$, $e_3 = (-1, 0, 1)$.

1.19. În spaţiul vectorial real R^4 se dau vectorii $x_1 = (1, 2, 0, -1)$, $x_2 = (-1, 0, 3, 0)$, $x_3 = (2, 1, 0, 4)$ şi $x_4 = (3, 0, -1, 5)$.

1. Să se arate că aceşti vectori formează o bază.

2. Să se determine formulele de transformare a coordonatelor unui vector cînd în R^4 se trece de la baza u_1, u_2, u_3, u_4 la baza x_1, x_2, x_3, x_4 ; unde $u_1 = (1, 0, 0, 0)$ $u_2 = (0, 1, 0, 0)$ $u_3 = (0, 0, 1, 0)$ şi $u_4 = (0, 0, 0, 1)$.

1.20. Să se determine o matrice nesingulară L astfel încît matricea $L^{-1}AL$ să fie triunghiulară, unde

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.21. În spațiul R^3 se definesc operatorii

$A_1x = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3)$; $x = (x_1, x_2, x_3)$

$A_2x = (x_1 + 1, x_2, x_3 - 1)$,

$A_3x = (x_1, x_1 - x_2, x_1 + x_2 - x_3)$.

1. Să se analizeze care dintre ei este liniar?

2. Pentru operatorii liniari dați să se găsească matricea atașată operatorului A în baza în care sînt date coordonatele vectorilor x și Ax.

1.22. În spațiul numeric V_4 se consideră operatorul liniar

$$Ax = (x_3, x_1 + x_4), x_2 - x_4, x_3).$$

Să se scrie $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Ker} A$.

1.23. Se consideră mulțimea funcțiilor continue de o variabilă reală definite pe un segment $[a, b]$ cu valori în corpul K.

1. Să se arate că aceste funcții formează un spațiu liniar.

2. Să se arate că $Af(t) = \int_a^t f(u)du$ este un operator liniar în spațiul funcțiilor continue pe $[a, b]$.

1.24. În spațiul liniar al polinoamelor de grad n se dă aplicația

$$A(P(x)) = P(x + 1) - P(x).$$

1. Să se arate că această corespondență este un operator liniar.

2. Să se găsească matricea corespunzătoare operatorului în baza $1, x, x^2, \ldots, x^n$

1.25. În spațiul numeric V_3 se dă matricea corespunzătoare operatorului liniar A în baza u_1, u_2, u_3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Să se scrie vectorul $y = Ax$, unde $x = (1, 0, -1)$.

2. Să se determine rangul operatorului A.

Scanned with OKEN Scanner

3. Să se găsească matricea operatorului A în baza $u_1' = u_1 + u_3 - 2u_2$; $u_2' = 2u_1 + u_2 - u_3$; $u_3' = u_1 - u_2 + 3u_3$.

1.26. Să se găsească spaţiul nul al operatorului liniar dat prin matricea:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.27. Să se determine polinomul caracteristic pentru operatorul liniar A căruia în spaţiul liniar E îi corespunde matricea:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.28. În spaţiul liniar E se dă operatorul liniar A prin matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai operatorului A.

2. Să se găsească spațiile fundamentale ale operatorului liniar dat.

1.29. Să se găsească valorile proprii și forma diagonală canonică pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

atașată operatorului liniar definit prin matricea dată în baza u_1, u_2, u_3.

1.30. În spațiul liniar E_3 raportat la baza u_1, u_2, u_3 se dă matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii.

2. Să se determine o bază în spațiul E_3 în raport cu care matricea A să fie triunghiulară.

1.31. Se dau matricile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Să se calculeze factorii invarianți și divizorii elementari pentru matricele date.

2. Să se reducă la forma normală Jordan matricele date.

1.32. Să se aducă la forma normală Jordan matricele

1. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

1.33. În spațiul liniar E_3 peste corpul R definim funcțiile f_i, $(i = 1, 2)$ astfel:

1. $f_1(x) = x_1 + 3x_2 - x_3$
2. $f_2(x) = x_1 + x_2 - 2$,

cu $x = (x_1, x_2, x_3)$ din E_3. Să se indice care din ele este forma liniară?

1.34. În spațiul liniar al polinoamelor de o variabilă reală se definesc funcțiile:

1. $f(x) = \int_a^b tx(t)\,dt$.
2. $f(x) = \int_a^b x(t^2)\,dt$.
3. $f(x) = \frac{dx(t)}{dt}$.
4. $f(x) = \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}$.

Să se studieze liniaritatea lor.

1.35. Fie $f(x)$ o formă liniară din spațiu liniar n-dimensional E_n. Mulțimea vectorilor $x \in E_n$ pentru care $f(x) = 0$ formează un subspațiu liniar. Să se determine dimensiunea acestui subspațiu.

1.36. Să se determine o formă liniară neidentic nulă în spațiul liniar cu trei dimensiuni, așa încît $f(x_1) = 0$, $f(x_2\}) = 3$, $f(x_3) = -2$, unde $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (-1, 0, 2)$, $x_3 = (1, -1, 0)$ și să se determine o bază a subspațiului format din vectorii pentru care $f(x) = 0$.

1.37. În spațiile R^3 și R^2 se consideră forma biliniară

$$A(x, y) = \xi^1\eta^1 - 2\xi^2\eta^1 + \xi^2\eta^2 - 3x^3\eta^2.$$

1. Să se determine matricea corespunzătoare formei biliniare în baza: $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ din R^3.
2. Să se determine spațiul nul din R^3 al formei biliniare.
3. Să se reducă la forma canonică.

Scanned with OKEN Scanner

1.38. În spațiul R^3 se consideră forma biliniară

$$A(x, y) = 3\xi^1\eta^1 + \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^2 + \xi^3\eta^1 + 3\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3,$$

Să se aducă la forma canonică.

1.39. Se dă forma pătratică

$$A(x) = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1x_2 + \gamma x_2^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Ce condiții trebuie să satisfacă α, β și γ pentru ca forma pătratică să fie pozitiv definită?

1.40. Să se aducă la forma canonică prin metoda lui Gauss formele pătratice:

1. $A(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_2 - 2x_2x_3,$
2. $A(x) = 7x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3,$
3. $A(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 - 6x_3x_4,$

unde x are coordonatele x_i.

1.41. Să se reducă la forma canonică printr-o transformare ortogonală următoarele forme pătratice:

1. $A(x) = 5x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3.$
2. $A(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4.$

1.42. Să se reducă la forma canonică a lui Iacobi următoarele forme pătratice:

1. $A(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - x_2^2 + [2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2.$
2. $A(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2.$

1.43. Să se arate că formele pătratice următoare sînt echivalente:

$$A_1(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$$

$$A_2(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.1.1. Pentru a determina rangul matricei o aducem la forma canonică diagonală.

Adunînd la coloana întîi coloana a doua și prima la a treia obținem

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 5 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Coloana întîi adunată la a doua, înmulțită cu -3 la a treia și înmulțită cu -4 la a cincea :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Din linia a doua scădem linia întîi înmulțită cu 2 și din linia a treia scădem prima linie

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Înmulțim coloana a treia cu 5 și o adunăm la coloana a 4-a, iar coloana a cincea o adunăm la coloana a treia înmulțită cu 3, apoi linia a 2-a înmulțită cu -2 o adunăm la a treia și schimbînd apoi coloana a adoua cu a treia și a treia cu a cincea obținem :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci rang $A = 3$.

2. Avem

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & a - \sum_{i=1}^{n} b_i c_i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a - \sum_{i=1}^{n} b_i c_i \end{pmatrix}.$$

Dacă $a = \sum_{i=1}^{n} b_i c_i$, rang $A = n$.

Dacă $a \neq \sum_{i=1}^{n} b_i c_i$, rang $A = n + 1$.

3. Dacă $\lambda^2 \neq -1$ și $\lambda^2 \neq 3$ rang $A = 3$.

1.2. Fie $A = T_1 T_2$ cu $T_1 = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{23} & t_{23} & t_{33} \end{pmatrix}$ și

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{23} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12}r_{12} & t_{11}r_{23} \\ t_{21} & t_{21}r_{21} + t_{22} & t_{21}r_{23} + t_{22}r_{23} \\ t_{31} & t_{31}r_{12} + t_{32} & t_{31}r_{13} + t_{32}r_{23} + t_{33} \end{pmatrix},$$

de unde

$$t_{11} = 1, \quad t_{12}r_{12} = 1, \quad t_{11}r_{13} = -1,$$
$$t_{21} = 2, \quad t_{21}r_{12} + t_{22} = -1, \quad t_{21}r_{13} + t_{22}r_{23} = 3,$$
$$t_{31} = 1, \quad t_{31}r_{12} + t_{32} = 4, \quad t_{31}r_{13} + t_{32}r_{23} + t_{33} = -2.$$

Rezolvînd sistemul obţinem

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ şi } T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.1. Avem

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}.$$

Presupunem că

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Rezultă

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$.

1.4. Fie :

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matricea căutată, unde a, b, c, d sînt numere reale. Condiţia dată este :

$$\mathfrak{M}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Din condiţia ca determinanţii matricelor din cei doi membri ai ultimei egalităţi să fie egali, obţinem :

$$(ad - bc)^3 = 1$$

sau, ţinînd seama că a, b, c, d sînt numere reale,

$$ad - bc = 1. \tag{2}$$

Calculînd matricea $\mathfrak{M}^3$, egalitatea (1) se scrie :

$$\begin{pmatrix} a^3 + 2abc + bcd & a^2b + abd + b^2c + bd^2 \\ a^2c + acd + bc^2 + cd^2 & abc + 2bcd + d^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de unde avem :

$$\begin{aligned} a^3 + 2bc + bcd &= 1 \\ d^3 + abc + 2bcd &= 1 \\ a^2b + abd + b^2c + bd^2 &= 0 \\ a^2c + acd + bc^2 + cd^2 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

În acest sistem, scăzînd între ele primele două ecuaţii şi ultimele două, rezultă :

$$\begin{cases} (a^2 + ad + bc + d^2)(b - c) = 0 \\ (a^2 + ad + bc + d^2)(a - d) = 0, \end{cases}$$

sau ţinînd seama de relaţia (2) :

$$\begin{cases} (a + d - 1)(a + d + 1)(b - c) = 0. \\ (a + d - 1)(a + d + 1)(a - d) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $a + d = 1$, din (2) rezultă $c = \dfrac{a^2 + a + 1}{b}$ și înlocuind în prima relație din (3), obținem o relație imposibilă.

Dacă $a + d = -1$, din (2) avem $c = -\dfrac{a^2 + a + 1}{b}$, iar sistemul (3) este identic satisfăcut.

Deci, în acest caz avem matricea:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{a^2 + a + 1}{b} & -a - 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru $a + d \neq 1$, din (4) deducem $a = d$, $b = c$, valori care înlocuite în (3) ne dau:

$$a(a^2 + 3b^2) = 1, \quad b(3a^2 + b^2) = 0,$$

de unde rezultă $b = c = 0$, $a = d = 1$, valori care verifică (3). În acest caz avem matricea unitate.

1.5. Dacă A' este transpusa matricii A avem:

$$A^c = \Delta T\,(A^{-1})' T, \quad \text{cu } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & +1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezultă

$$|A^c| = \Delta^{n-1}$$

și

$$(A^c)^c = \Delta^{n-1}\, T((A^c)^{-1})' T = \Delta^{n-1}\, \Delta^{-1} A = \Delta^{n-2} A.$$

1.6. Fie $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ cu $P(A) = 0$. Această egalitate este echivalentă cu un sistem linear și omogen de m^2 ecuații cu $n + 1$ necunoscute $a_0, a_1, \dots, a_n$. Acest sistem pentru $n \geqslant m^2$ are o soluție nebanală. Fie $f(x)$ un polinom de grad mai mic ca $P(x)$ și $f(A) = 0$. Avem $P(x) = f(x)q(x) + r(x)$ cu grad $r(x) <$ grad $f(x)$, și $r(A) = P(A) - f(A)\, q(A) = 0$, deci $r(x) = 0$. Rezultă $P(x) = f(x)q(x)$.

1.7. Notînd prin

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}9 & 7 & 6\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 18 & 12 & 9\\ 23 & 15 & 11\end{pmatrix},$$

ecuația se scrie:

$$AXB=C.$$

Avem $\det A=1$ și $\det B=-2$.

Matricele A și B fiind nesingulare, înmulțind ecuația la stînga cu A^{-1} și la dreapta cu B^{-1}, obținem:

$$X=A^{-1}CB^{-1}.$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}\text{ și }B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -8\\ 1 & -3 & 12\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

sau

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 18 & 12 & 9\\ 23 & 15 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -8\\ 1 & -3 & 12\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

și făcînd înmulțirile determinăm pe X

$$X=\begin{pmatrix}10 & 1 & 1\\ 13 & 2 & 3\\ 20 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

1.8.1. O primă condiție este ca matricele A și A_1 sau B și B_1 să fie nesingulare.

Să presupunem că matricele A și A_1 sînt nesingulare. În acest caz vom înmulți la stînga prima ecuație din sistem cu A^{-1}, iar ecuația a doua cu A_1^{-1}.

Sistemul devine:

$$\begin{aligned}X+A^{-1}BY&=A^{-1}C\\ X+A_1^{-1}B_1Y&=A_1^{-1}C_1.\end{aligned}\qquad(1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Scăzînd cele două ecuaţii, obţinem :

$$(A^{-1}B - A_1^{-1}B_1)\,Y = A^{-1}C - A_1^{-1}C_1. \qquad (2)$$

Pentru ca această ecuaţie să admită soluţie unică, trebuie ca matricea $(A^{-1}B - A_1^{-1}B_1)$ să fie nesingulară. În acest caz, din ecuaţia (2) avem :

$$Y = (A^{-1}B - A_1^{-1}B_1)^{-1}(A^{-1}C - A_1^{-1}C_1). \qquad (3)$$

Înlocuind această valoare în una din ecuaţiile (2), obţinem valoarea lui X.

Deci, sistemul admite o soluţie unică, dacă următoarele matrice sînt nesingulare :

$$A,\ A_1,\ A^{-1}B - A_1^{-1}B_1 \text{ sau } B,\ B_1,\ B^{-2}A - B_2^{-1}A_1.$$

2. Pentru cazul numeric dat avem :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem :

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_1^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad A_1^{-1}C_1 = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

deci

$$A^{-1}B - A_1^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}C - A_1^{-1}C_1 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Cu aceste falori, ecuaţia (2) se scrie

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Inversa matricei $A^{-1}B - A_1^{-1}B_1$ este :

$$(A^{-1}B - A_1^{-1}B_1)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (3) obţinem :

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -4 \end{pmatrix},$$

adică

$$Y = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 11 & 4 \end{pmatrix};$$

Analog găsim :

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 23 & -6 \end{pmatrix};$$

1.9. Teorema lui Cayley — Hamilton arată că orice matrice pătratică îşi satisface propriul ei polinom caracteristic : $f(A) = 0$ unde $f(\lambda) = \det(\lambda I - A')$.

1. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Avem $\det A \neq 0$ şi $f(\lambda) = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162$

şi

$$f(A) = A^3 - 18A^2 + 99A - 162 = 0,$$

$$(0 = \text{matrice cu toate elementele } 0),$$

de unde rezultă

$$A^{-1} = \frac{1}{162}(A^2 - 18A + 99I),$$

dar

$$A^2 = \begin{pmatrix} 53 & -26 & 4 \\ -26 & 44 & -22 \\ 4 & -22 & 29 \end{pmatrix},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$A^{-1}=\frac{1}{162}\left[\begin{pmatrix}53&-26&4\\-26&44&-22\\4&-22&29\end{pmatrix}-18\begin{pmatrix}7&-2&0\\-2&6&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}+\right.$$
$$\left.+99\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right];$$

de unde

$$A^{-1}=\frac{1}{162}\begin{pmatrix}278&10&4\\10&35&14\\4&14&38\end{pmatrix}.$$

2. $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-5&-2&-3\\-2&\lambda+1&0\\-3&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3-5\lambda^2+12\lambda+10$

și $A^{-1}=-\frac{1}{10}[A^2-5A+12I]=-\frac{1}{10}\left[\begin{pmatrix}38&8&18\\8&5&6\\18&6&10\end{pmatrix}-\right.$

$$\left.-5\begin{pmatrix}5&2&3\\2&-1&0\\3&0&1\end{pmatrix}+12\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\right]$$

de unde

$$A^{-1}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}25&-2&3\\-2&22&6\\3&6&17\end{pmatrix}.$$

3. $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0&-3&0\\-3&0&5&0\\0&6&0&-6\\0&-6&0&12\end{pmatrix}.$

1.10.1. Matricea formată cu coordonatele vectorilor

$$\begin{pmatrix}2&-1&5&-6\\2&1&11&2\\1&0&4&-1\\11&4&56&+5\end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

are rangul $r = 2$. Rangul matricei fiind inferior numărului de vectori, rezultă că vectorii sînt liniar dependenţi.

2. Matricea formată cu coordonatele vectorilor are rangul egal cu numărul vectorilor, 5, deci vectorii sînt liniar independenţi.

3. Matricea $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ are rangul 2, deci există doi vectori liniar independenţi. Minorul $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Complementii algebrici ai elementelor ultimei coloane ai minorului $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & -9 & 8 \end{vmatrix}$ sînt $-33, 22, 11$;

deci avem relaţia de dependenţă liniară

$$-33x_1 + 22x_2 + 11x_3 = 0.$$

1.11. Dimensiunea este $n = 3$. O bază poate fi formată, spre exemplu, din vectorii x_1, x_2, x_3.

1.12. Dimensiunea este $n = 4$. Vectorii consideraţi formează o bază a spaţiului vectorial.

1.13. Fie vectorii $\mathbf{v}_i = (a_1^i, a_2^i, a_3^i, a_4^i)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ cu $\sum_{k=1}^{4} a_k^i = 0$, $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Rangul matricei (a_j^i), $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ este 3. O bază a acestui subspaţiu poate fi formată din oricare trei vectori $v_i (i = 1, 2, 3, 4)$ din cei patru.

1.14. Dimensiunea subspaţiului H este 2. O bază a lui poate fi formată din $\mathbf{v}_1 = \left(-3, 0, 1, \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{v}_2 = \left(0, 3, 1, \frac{1}{2}\right)$.

Această bază completată cu vectorii $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 0)$ şi $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1)$ formează o bază în R^4.

1.15.1. Dimensiunea sumei este 3, deci baza poate fi constituită, spre exemplu, din vectorii

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = (0, -1, 4, 1), \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2 = (1, 4, 1, 6)$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$z_3 = x_1 + y_2 = (0, 2, 3, 5).$$

Dimensiunea intersecției este unu, iar vectorul bază este $z = -5x_1 + 7x_2 = -13y_1 + 4y_2$, deci $z = (9, 12, -10, 7)$.

2. Dimensiunea sumei este 4, deci o bază poate fi considerată baza u_1, u_2, u_3, u_4. Dimensiunea intersecției este 1, iar vectorul este $z = -19x_1 + 13x_2 + 15x_3 = 5y_1 + 19y_2$, deci $z = (44, -9, -25, 28)$.

3. Intersecția subspațiilor conține numai vectorul nul. Avem pentru suma subspațiilor o sumă directă, iar dimensiunea este egală cu suma dimensiunilor celor două subspații. În cazul nostru dimensiunea sumei este 4. O bază poate fi considerată u_1, u_2, u_3, u_4.

1.16.1. Avem $\operatorname{codim} E_1 = \dim E/E_1 = \dim E - \dim E_1$, dar

$$\dim E = \dim E_1 + \dim E_2 = \dim E_1' + \dim E_2',$$

de unde rezultă

$$\operatorname{codim} E_1 = \dim E_2.$$

2. Avem

$$\dim E_1 + \dim E_1' - \dim E \leqslant \dim (E_1 \cap E_1') \leqslant \leqslant \min (\dim E_1, \dim E_1')$$

și

$$\operatorname{codim} (E_1 \cap E_1') = \dim E - \dim (E_1 \cap E_1').$$

De aici rezultă:

$$\operatorname{codim} (E_1 \cap E_1') \leqslant 2 \dim E - (\dim E_1 + \dim E_1'),$$

de unde inegalitatea cerută.

1.17.1. — 2. Dimensiunea spațiului vectorial $\mathfrak{M}_2$ este 4. O bază a sa va fi formată din matricele

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Fie $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}_2'$ cu $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$.

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2'; \quad \alpha A_1 = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_2 \\ \alpha b_1 & \alpha c_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2'.$$

Scanned with OKEN Scanner

4. Dimensiunea lui $\mathfrak{M}_2'$ este 3. O bază a sa poate fi considerată : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.18. Fie ξ_i^j, $(j=1,2,3)$, coordonatele vectorului x_i, $(i=1,2)$, în baza u_1, u_2, u_3. Avem $x_i = \sum_{j=1}^{3} \xi_i^j e_j$.

Pentru x_1 obținem sistemul de ecuație :

$$3\xi_1^1 + 3\xi_1^2 - \xi_1^3 = 1$$
$$\xi_1^1 + 6\xi_1^2 = 0$$
$$5\xi_1^1 + 2\xi_1^2 + \xi_1^3 = 2,$$

de unde $\xi_1^1 = \frac{18}{43}$, $\xi_1^2 = -\frac{3}{43}$, $\xi_1^3 = \frac{2}{43}$, iar x_1 se scrie în baza u_1, u_2, u_3 : $x_1 = \left(\frac{18}{43}, \frac{-3}{43}, \frac{2}{43}\right)$. Analog, $x_2 = \left(\frac{21}{20}, \frac{-7}{40}, \frac{19}{40}\right)$.

1.19.1. Vectorii sînt liniar independenți, deci pot forma o bază în V_4.

2. Avem $x = \sum_{i=1}^{3} \xi^i u_i = \sum_{j=1}^{3} \eta^j x_j$, unde am notat cu ξ^i $(i = 1,2,3)$ coordonatele vectorului x în baza u_i, $(i = 1,2,3)$, iar cu η^j $(j = 1,2,3)$ coordonatele aceluiași vector în baza x_j $(j = 1, 2, 3)$. Deci

$$\xi^1 = \eta^1 - \eta^2 + 2\eta^3 + 3\eta^4, \quad \xi^2 = 2\eta^1 + \eta^3, \quad \xi^3 = 2\eta^2 - \eta^4,$$
$$\xi^4 = -\eta^1 + 4\eta^3 + 5\eta^4, \text{ de unde obținem}$$
$$\eta^1 = \frac{1}{27}(15\xi^1 + 2\xi^2 + 5\xi^3 + 8\xi^4),$$
$$\eta^2 = \frac{1}{27}(7\xi^1 - 2\xi^2 + 6\xi^3 - 3\xi^4),$$
$$\xi^3 = \frac{1}{27}(-30\xi^1 + 23\xi^2 - 10\xi^3 + 16\xi^4),$$
$$\eta^4 = \frac{1}{27}(21\xi^1 - 6\xi^2 + 7\xi^3 - 9\xi^4).$$

Scanned with OKEN Scanner

1.20. Valorile proprii ale matricei A sînt $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ și $\lambda_3 = 9$. Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 3$ este $x_1 = (1, 2, 2)$. Fie matricea nesingulară

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

unde în prima coloană găsim componentele lui x_1. Avem

$$Q_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

unde $A_1 = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$,

O valoare proprie a matricei A_1 este 6, iar vectorul propriu corespunzător este $x_2 = (2, 1)$. Fie

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem

$$Q_2^{-1}A_1Q_2 = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix};$$

Rezultă

$$Q = Q_1 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

și

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.21. Avem $A_1(\alpha x + \beta y) = A_1(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) = (\alpha x_1 + \beta y_1 + 2(\alpha x_2 + \beta y_2), \alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha x_3 - \beta y_3, 2\alpha x_1 + 2\beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 - 3\alpha x_3 - 3\beta y_3) = (\alpha(x_1 + 2x_2) + \beta(y_1 + 2y_2), \alpha(x_1 - x_3) + \beta(y_1 - y_3), \alpha(2x_1 + x_2 - 3x_3) + \beta(2y_1 + y_2 - 3y_3)) = \alpha(x_1 + 2x_2, x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3) + \beta(y_1 + 2y_2, y_1 - y_3, 2y_1 + y_2 - 3y_3) = \alpha A_1 x + \beta A_1 y,$ $x, y \in R^3,$

deci A_1 este liniar.

Scanned with OKEN Scanner

Notînd $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1)$ avem

$$A_1u_1 = (1, 1, 2) = u_1 + u_2 + 2u_3$$
$$A_1u_2 = (2, 0, 1) = 2u_1 + u_3$$
$$A_1u_3 = (0, -1, -3) = -u_2 - 3u_3,$$

deci matricea atașată operatorului A_1 este $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Operatorul A_2 nu este liniar.

Operatorul A_3 este liniar iar matricea atașată lui este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.22. Avem $\mathrm{Im}A = \{y \mid y \in V_4, \ (\exists)x \in V_4, \ y = Ax\}$, deci $\mathrm{Im}A = \{(x_3, x_1 + x_4, x_2 - x_4, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_4\}$.

Din definiție $\mathrm{Ker}\, A = \{x \mid x \in V_4, \ Ax = \theta\}$, deci $y = (x_3, x_1 + x_4, x_2 - x_4, x_3) = (0, 0, 0, 0)$, de unde rezultă $x_3 = 0$, $x_1 = -x_4$, $x_2 = x_4$.

$$\mathrm{Ker}A = \{(-x_4, x_4, 0, x_4) \mid x_4 \in R\}.$$

1.23.1. Suma a două funcții continui pe $[a, b]$ este o funcție continuă pe $[a, b]$ și produsul unei funcții continui cu un scalar e o funcție continuă.

2. Rezultă imediat folosind proprietățile integralei.

1.24.1. Avem $A(\alpha P_1(x) + \beta P_2(x)) = (\alpha P_1 + \beta P_2)(x+1) - (\alpha P_1 + \beta P_2)(x) = (\alpha P_1(x+1) + \beta P_2(x+1) - \alpha P_1(x) - \beta P_2(x) = \alpha[P_1(x+1) - P_1(x)] + \beta[P_2(x+1) - P_2(x)] = \alpha A(P_1(x)) + \beta A(P_2(x))$,

deci operatorul A este liniar.

2. $A(1) = 0$, $A(x) = (x+1) - x = 1$, $A(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = 1 + 2x$.

$A(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 1 + 3x + 3x^2, \ldots, A(x^n) = (x+1)^r - x^n = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k x^k$,

Scanned with OKEN Scanner

iar matricea operatorului A în baza dată se scrie :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & c_2^1 & c_3^1 & \dots & c_n^1 \\ 0 & 0 & 0 & c_3^2 & \dots & c_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

1.25.1. $x = u_1 - u_3$, $Ax = Au_1 - Au_3 = u_1 + 2u_2 - u_3 + u_2 + 2u_3 = u_1 + 3u_2 + u_3$, deci $y = (1, 3, 1)$.

2. $r_A = \text{rang } A = 3$.

3. Fie B matricea de trecere de la prima bază la baza a doua. Avem :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dacă A este matricea atașată operatorului în noua bază, avem :

$$\tilde{A} = B^{-1} A\, B.$$

Avem

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{3}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

și făcînd calculele obținem

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{14}{13} & \frac{20}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{4}{13} & \frac{26}{13} \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.26.1. Dat operatorul A în spațiul liniar E, vom nota cu $N_A = \{x | x \in E, Ax = \theta\}$.

Subspațiul N_A al lui E se numește spațiul nul al operatorului A.

Fie $x = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ așa încît $Ax = \theta$.

Avem $x = \xi^1 u_1 + \xi^2 u_2 + \xi^3 u_3$, iar $Ax = \xi^1(u_1 + 2u_2 - u_3) + \xi^2(u_2 + u_3) + \xi^3(-u_1 + 3u_3) = (\xi^1 - \xi^3)\, u_1 + (2\xi^1 + \xi^2)\, u_2 + (-\xi^1 + \xi^2 + 3\xi^3)\, u_3$, sau $Ax = (\xi^1 - \xi^3, 2\xi^1 + \xi^2, -\xi^1 + \xi^2 + 3\xi^3)$.

Din condiția $Ax = \theta$ obținem $\xi^1 = \xi^3$, $\xi^2 = -2\xi^3$, deci spațiul nul al operatorului conține toți vectorii de forma $(\xi^3, -2\xi^3, \xi^3)$.

2. Ecuația $Ax = \theta$ nu admite decît soluția θ. Operatorul A este nesingular. Defectul operatorului A este zero, deci $\dim N_A = 0$.

1.27.1. Polinomul caracteristic al operatorului liniar A este $f(\lambda) = \det(\lambda I - A')$, unde I este matricea unitate de ordin 3, iar A' este transpusă matricei corespunzătoare operatorului liniar

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda + 1.$$

2. $f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 11\lambda - 9.$

3. $f(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 5\lambda^2 - 9\lambda + 3.$

1.28.1. Numim valori proprii (rădăcini caracteristice a operatorului liniar A) rădăcinile ecuației caracteristice $f(\lambda) = \det(\lambda I - A') = 0$.

Avem

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda + 1 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 1),$$

de unde

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Dacă $x = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ este vectorul propriu corespunzător valorii proprii λ, va trebui să avem $Ax - \lambda x = \theta$. (1) Pentru $\lambda = -1$

Scanned with OKEN Scanner

ecuația (1) se scrie $Ax + x = 0$, de unde rezultă sistemul $2\xi^1 + \xi^3 = 0$, $\xi^1 - \xi^2 + \xi^3 = 0$, de unde $\xi^3 = -2\xi^1$, $\xi^2 = -\xi^1$, deci vectorul propriu căutat este $\alpha(1, -2, -1)$, α fiind un scalar complex oarecare. Pentru $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ obținem vectorul propriu $\beta\left(1, 0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, iar pentru $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ vectorul propriu $\gamma\left(1, 0, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. Știm că numărul spațiilor fundamentale ale unui operator liniar este egal cu numărul valorilor proprii distincte. În cazul nostru operatorul liniar are trei spații fundamentale. Spațiul fundamental corespunzător valorii proprii λ_h este spațiul generat de vectorii proprii distincți corespunzători lui λ_h. El este dat de sistemul de ecuații $(\alpha_i^j - \lambda_h \delta_i^j)\xi^i = 0$, unde $A = (\alpha_i^j)$.

1.29. Ecuația caracteristică $\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$, sau $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$ are soluțiile $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$, care sînt valorile proprii.
Vectorii proprii corespunzători sînt $x_1 = \alpha(1, 2, 2)$, $x_2 = \alpha(2, 1, -2)$ și $x_3 = \alpha(-2, 2, -1)$, α fiind un scalar real sau complex.

Valorile proprii fiind distincte, vectorii proprii sînt liniar independenți, deci pot forma o bază. Considerînd baza ortonormată $\tilde{x}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\tilde{x}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$, $\tilde{x}_3 = \left(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ matricea atașată operatorului liniar în noua bază este

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

1.30. 1. Avem $f(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2) = 0$, cu rădăcina $\lambda_1 = -1$ dublă și $\lambda_2 = -2$ rădăcina simplă. Vectorii proprii corespunzători sînt $x_1 = (\alpha, \beta, -\alpha)$ și $x_2 = \alpha(0, 1, -1)$.

2. Avînd în vedere că $\lambda_1 \neq \lambda_2$, rezultă că x_1 și x_2 sînt liniar independenți. Noua bază a spațiului E_3 o putem lua formată

Scanned with OKEN Scanner

din vectorii $x_1 = (1, 1, -1)$, $x_2 = (0, 1, -1)$ și x_3 așa încît $Ax_3 = x_2 + x_3$, de unde rezultă $x_3 = (0, -1, 0)$. În noua bază matricea A se scrie $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1.31. Numim factori invarianți și divizori elementari ai unei matrici A, factorii invarianți și divizorii elementari ai λ-matricei caracteristice $(\lambda I - A')$. Dacă A este o matrice de ordin n cu elemente din corpul K, factorii invarianți ai matricei $(\lambda I - A)$ sînt:

$$i_1(\lambda) = \frac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)}, \quad i_2(\lambda) = \frac{d_{n-1}(\lambda)}{d_{n-2}(\lambda)}, \ldots, \quad i_n(\lambda) = \frac{d_1(\lambda)}{d_0(\lambda)},$$

unde $d_k(\lambda)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, este cel mai mare divizor comun al minorilor de ordin k din $(\lambda I - A')$. Polinoamele ireductibile a factorilor invarianți sînt divizorii elementari.

1. Avem $d_3(\lambda) = f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$, $d_2(\lambda) = 1 = d_1(\lambda) = d_0(\lambda)$ pentru ambele matrice. Deci matricele au cîte un singur factor invariant $i_1(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$ deoarece $i_2(\lambda) = i_3(\lambda) = 1$. Divizorii elementari sînt $\lambda - 1$, $\lambda - 2$, $\lambda + 1$.

2. Cele două matrice au aceiași formă normală Jordan $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Matricele A și B sînt asemenea.

1.32.1. Divizorii elementari ai matricei A sînt $(\lambda - 1)^2$ și $(\lambda + 1)^2$, deci forma normală este $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Matricea are ca divizor elementar pe $(\lambda - 1)^4$, deci forma normală Jordan este $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

1.33.1. $f_1(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1) + 3(\alpha x_2 + \beta y_2) - (\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(x_1 + 3x_2 - x_3) + \beta(y_2 + 3y_2 - y_3) = \alpha f_1(x) + \beta f_1(y)$, unde $x, y \in E$, iar $\alpha, \beta \in R$. Deci f este în acest caz liniară.

2. $f_2(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) - 2$. $\alpha f_2(x) + \beta f_2(y) = \alpha(x_1 + x_2 - 2) + \beta(y_1 + y_2 - 2) = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) - 2(\alpha + \beta)$.

Deci, în general, $f(\alpha x + \beta y) \neq \alpha f(x) + \beta f(y)$; f nu este liniară.

1.34.1. $f(\alpha x + \beta y) = \int_a^b t[\alpha x(t) + \beta y(t)]\,dt = \alpha \int_a^e tx(t)dt + \beta \int_b^a ty(t)dt = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $\alpha, \beta \in K$.

2. Ţinînd seama că $(x + y)(t^2) = x(t^2) + y(t^2)$, rezultă $f(\alpha x + \beta y) = \int_e^b (\alpha x + \beta y)(t^2)dt = \alpha \int_a^b x(t^2)dt + \beta \int_a^b y(t^2)dt = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $\alpha, \beta \in K$.

3. Forma nu este liniară. Este o aplicaţie a spaţiului liniar în el însuşi nu în corpul numerelor reale. Aplicaţia este în schimb un operator liniar.

4. Este formă liniară.

1.35. Fie $E_1 = \{x | x \in E, f(x) = 0\}$. Pentru $x, y \in E_1$ avem $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0$. deci $\alpha x + \beta y \in E_1$. Dacă $u_1, u_2, \ldots, u_n$ este o bază a spaţiului liniar E avem $x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i u_i$ şi $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \alpha_i$, α_i = scalari ce depind de baza aleasă. Deci între componentele oricărui vector din subspaţiul E_1 există relaţia $\sum_{i=1}^{n} \xi^i \alpha_i = 0$. Dimensiunea subspaţiului este deci $n - 1$

1.36. Fie $x = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$. Funcţionala liniară căutată va fi de forma

$$f(x) = \xi_1\xi^1 + \xi_2\xi^2 + \xi_3\xi^3, \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3 = \text{numere fixe.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$f(x_1) = \xi_1 + \xi_3 = 0$$
$$f(x_2) = -\xi_1 + 2\xi_3 = 3$$
$$f(x_3) = \xi_1 - \xi_2 = -2,$$

de unde $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 1$, deci

$$f(x) = -\xi^1 + \xi^2 + \xi^3.$$

Dimensiunea subspațiului format din vectorii x pentru care $-\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 = 0$ este 2. Din acest subspațiu face parte vectorul x_1; trebuie să mai determinăm un vector y, $y = (\eta^1, \eta^2, \eta^3)$ cu $-\eta^1 + \eta^2 + \eta^3 = 0$ și neproporțional cu x_1; și anume: $y = (-2, 1, -3)$. Deci o bază a subspațiului format din vectorii pentru care $f(x) = 0$ este x_1, y.

1.37.1. În bazele $u_1, u_2, u_3 \in R^3$, $y_1, y_2 \in R^2$ matricea corespunzătoare formei biliniare este

$$A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2. \end{matrix}$$

Dacă notăm cu $L = (\lambda_i^j)$ matricea de trecere la noua bază $v_i = \lambda_i^j u_j$, $(i = 1,2,3,\ j = 1,2)$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

obținem:

$\tilde{A} = L\,A\,I'$ (am schimbat numai baza referitoare la primul argument), deci

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $N_{R^3} = \{x \mid x \in R^3;\ A(x, y) = 0\ (\forall)\ y \in R^2\}$ și $\dim R_0^3 = 3 - r = 1$, unde $r = \operatorname{rang} A$. Dar $x \in R_0^3 \Leftrightarrow A(x, y_j) = 0$ și cum $A(x, y_j) = \xi^i A(u_i, y_j) = 0$, $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2)$. Deci N_{R^3} este format din vectori de forma $x_0 = \alpha\,(0, 1, 2)$.

3. Avem $R^3 = N_{R^3} + R_1^3$, iar $A(x, y) = A(x, y) + A(x, y)$, $R^3, R^2 \quad R_1^3, R^2 \quad N_{R^3}, R^2$

dar $A(x, y) = 0$ deci $A(x, y) = A(x, y)$.
$N_{R^3}, R^2 \quad R^3, R^2 \quad R_1^3, R^2$

Considerînd vectorii v_1, v_2 ca formînd o bază în R_1^3 și trecînd de la baza v_1, v_2 la baza $\bar{v}_1 = v_1$, $\bar{v}_2 = -v_1 + v_2$ în bazele $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in R_1^3$ și $y_1, y_2 \in R^2$ obținem matricea formei biliniare $\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, deci

$$A(x, y) = \xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2.$$

1.38. Matricea formei biliniare este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vom căuta să facem o schimbare de bază așa încît în noua bază matricea formei biliniare să fie o matrice diagonală. Avem deci $(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 1)$, iar vectorii proprii corespunzători $x_1 = (0, 0, 1)$, $x_2 = (1, -4, 1)$, $x_3 = (2, 0, 1)$ formează o bază. Ortogonalizînd obținem baza $\tilde{x}_1 = (0, 0, 1)$, $\tilde{x}_2 = (1, -4, 0)$ și $\tilde{x}_3 = (4, 1, 0)$.

Relativ la această bază, matricea formei biliniare va fi echivalentă cu matricea $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, iar forma biliniară se scrie

$$A(x, y) = \xi^1\eta^1 + 3\xi^2\eta^2 - \xi^3\eta^3.$$

1.39. Condiția necesară și suficientă ca $A(x)$ să fie definită pozitiv este ca lanțul minorilor principali $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$, $(\Delta_0 = 1)$ să nu prezinte nici o variație de semn. Matricea formei pătratice este

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \beta & \gamma & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$\Delta_0 = 1$. $\Delta_1 = \alpha$, $\Delta_2 = \alpha\gamma - \beta^2$, $\Delta_3 = -4(\alpha + \beta) - \gamma$. Deci trebuie să avem: $\alpha > 0$, $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ $4(\alpha + \beta) + \gamma < 0$.

1.40.1. Avem $A(x) = \frac{1}{3}(9x_1^2 + 6x_1x_2 + 6x_2^2) + 5x_3^2 - 2x_2x_3$, sau

$$A(x) = \frac{1}{3}(3x_1 + x_2)^2 + \frac{5}{3}x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_2x_3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu transformarea

$$x_1' = 3x_1 + x_2,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3$$

obținem

$$A(x') = \frac{1}{3}x_1'^2 + \frac{5}{3}x_2'^2 + 5x_3'^2 - 2x_2'x_3',$$

care se mai scrie

$$A(x') = \frac{1}{3}x_1'^2 + \frac{1}{15}(5x_2' - 3x_3')^2 + \frac{216}{15}x_3'^2.$$

Făcînd transformarea

$$x_1'' = x_1',\ x_2'' = 5x_2' - 3x_3',\ x_3'' = x_3'$$

obținem

$$A(x'') = \frac{1}{3}x_1''^2 + \frac{1}{15}x_2''^2 + \frac{216}{15}x_3''^2. \qquad (1)$$

Deci cu transformarea $\tau: \begin{cases} x_1'' = 3x_1 + x_2 \\ x_2'' = 5x_2 - 3x_3 \\ x_3'' = x_3 \end{cases}$

forma pătratică $A(x)$ se transformă în (1).

2. $A(x') = \frac{1}{17}x_1'^2 + \frac{17}{7}x_2'^2 + \frac{594}{119}x_3'^2$, unde

$$\tau: \begin{cases} x_1' = 7x_1 - 2x_2 \\ x_2' = x_2 + \frac{2}{17}x_3 \\ x_3' = x_3. \end{cases}$$

3. $A(x') = \frac{1}{2}x_1'^2 - \frac{2}{5}x_2'^2 - \frac{41}{30}x_3'^2 - 6x_4'^2$, unde

$$\tau: \begin{cases} x_1' = 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 \\ x_2' = \frac{5}{2}x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ x_3' = 3x_3 - 3x_4 \\ x_4' = x_1 + \frac{1}{3}x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

1.41.1. Fie forma pătratică $\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ și $x_i = \sum_j \alpha_{ij} x'_j$(1) cu $\sum_j \alpha_{ij} \alpha_{jk} = \delta_{ik}$ transformarea ortogonală. Coeficienții α_{ij} ai transformării ortogonale sînt soluții ale sistemului

$$\sum_j (a_{ij} - \rho\delta_{ij})\, \alpha_{ji} = 0, \qquad (2)$$

unde ρ se obține din ecuația caracteristică a formei liniare: $\det(\rho I - A') = 0$.

Avem

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \rho(\rho + 2)(\rho - 7) = 0.$$

Din (2) pentru $\rho = 0$ obținem $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{21} = 2$, $\alpha_{31} = -3$. Ținînd seama de relațiile de ortogonalizare și normare găsim

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \alpha_{21} = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \alpha_{31} = \frac{-3}{\sqrt{14}}.$$

Pentru $\rho = -2$, $\alpha_{12} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\alpha_{22} = -\frac{2}{\sqrt{6}}$, $\alpha_{32} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ și pentru $\rho = 7$, $\alpha_{13} = \frac{4}{\sqrt{21}}$, $\alpha_{23} = \frac{1}{\sqrt{21}}$, $\alpha_{33} = \frac{2}{\sqrt{21}}$.

Deci transformarea ortogonală este

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} x'_2 + \frac{4}{\sqrt{21}} x'_3$$

$$x_2 = \frac{2}{\sqrt{14}} x'_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} x'_2 + \frac{1}{\sqrt{21}} x'_3$$

$$x_3 = -\frac{3}{\sqrt{14}} x'_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} x'_2 + \frac{2}{\sqrt{21}} x'_3.$$

2. $A(x') = x'^2_1 + x'^2_2 + 3x'^2_3 - x'^2_4$, unde

$$x'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_2 + x_4)$$

$$x'_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + x_3)$$

$$x'_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

$$x'_4 = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4).$$

Scanned with OKEN Scanner

1.42.1. Forma pătratică nedegenerată $A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$ dată peste cîmpul K se poate reduce la forma canonică Jacobi peste K, $A(x') = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}\, x_k'^2$, unde minorii principali $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, $(\Delta_0 = 1)$ ai discriminantului $|A|$ ai matricii A sînt presupuși diferiți de zero; aplicîndu-i o transformare liniară nedegenerată (T) convenabilă de matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & d_{1n}^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & d_{2n}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & d_{n-1}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix},$$

unde $\lambda_j^2 = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j} \neq 0$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $\lambda_j \in K$, $d_{in}^{(n)} = -a_{in}\, \frac{\lambda_n^2}{\lambda_j^2}$,

$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Avem $\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = -2, \Delta_3 = -4, \Delta_4 = 2,$ deci cu transformarea

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

obținem

$$A(x') = x_1'^2 - \frac{1}{2}\, x_2'^2 + \frac{1}{2}\, x_3'^2 - 2x_4'^2.$$

2. Avem

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ cu } \Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = 0,\ \Delta_3 = -8.$$

Vom face o schimbare de bază astfel ca în noua bază minorii principali să fie toți diferiți de zero.

Cu transformarea $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ obținem matricea formei

Scanned with OKEN Scanner

pătratice în noua bază $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, în care $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = -4$, $\Delta_3 = -4$, iar forma canonică va fi $A(x') = \frac{1}{2} x_1'^2 - \frac{1}{2} x_2'^2 + x_3'^2$.

1.43. Transformarea

$$\tau_1 : \begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{3}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3 \\ x_2 = \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3, \\ x_3 = -\frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3 \end{cases}$$

aplicată formei pătratice $A_1(x)$ o aduce la forma normală $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, iar transformarea

$$\tau_2 : \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

aduce forma pătratică $A_2(x)$ la aceeași formă normală.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 2

TEORIA CÎMPULUI

Fie E_3 un spațiu euclidian raportat la un sistem de axe cartizian ortogonal $Oxyz$.

Numim *cîmp scalar* mărimea definită de o funcție de cimp $\varphi(P) = \varphi(x, y, z)$, definită pentru orice punct $P(x, y, z)$ al unui domeniu D din E_3.

Suprafața de ecuație $\varphi(P) = \varphi(P_0)$, $(P_0 = \text{fix}, P_0 \in D)$, se numește *suprafață de nivel* a cîmpului scalar $\varphi(P)$.

Numim *derivata cîmpului scalar* $\varphi(P)$ *după direcția de versor* t *în punctul* P_0 — notată $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{P_0}$ — unde $\boldsymbol{t}$ este versorul tangentei în punctul P_0 la curba (Γ) ce trece prin P_0 și P, limita raportului (dacă există)

$$\lim_{P \to P_0} \frac{\varphi(P) - \varphi(P_0)}{\varphi_{P_0 P}},$$

$\varphi_{P_0 P}$ fiind abscisa curbilinie a punctului P față de P_0.

Avem

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{P_0} = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z_0},$$

α, β, γ fiind componentele versorului $\boldsymbol{t}$ și

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{P_0} = \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_{P_0} \cos \theta$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\boldsymbol{n}$ este versorul normalei la suprafaţa de nivel ce trece prin P_0 şi θ unghiul dintre $\boldsymbol{t}$ şi $\boldsymbol{n}$.

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}\right)_{P_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}\right)^2}.$$

Vectorul de componente $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_0}$ se numeşte *gradientul* cîmpului scalar diferenţiabil în D $\varphi(P)$, în $P_0 \in D$.

Avem

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{n}$$

şi

$$\operatorname{grad} F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \operatorname{grad} \varphi_k.$$

Funcţia vectorială $\boldsymbol{v}(P) = \boldsymbol{v}(x, y, z)$ definită pentru orice $P \in D$ se numeşte *cîmp vectorial*.

O curbă (Γ) din D pentru care $\boldsymbol{v}(P)$ este tangent ei în fiecare punct se numeşte *linie de cîmp*. Liniile de cîmp sînt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale vectoriale

$$\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0.$$

Suprafaţa generată de liniile de cîmp se numeşte suprafaţă de cîmp.

Numim *divergenţa* cîmpului vectorial $\boldsymbol{v}(P)$ de componente v_1, v_2, v_3 expresia

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z},$$

iar *rotorul* lui $\boldsymbol{v}(P)$, vectorul

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

Numim *circulaţia* cîmpului vectorial $\boldsymbol{v}(P)$ pe curba închisă rectificabilă, orientată, (C), expresia

$$\Gamma = \int_C \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

Scanned with OKEN Scanner

iar expresia

$$\Phi(\mathrm{v}, \Sigma) = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{n}\boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\sigma$$

se numește *fluxul total* al cîmpului $\boldsymbol{v}(P)$ prin porțiunea de suprafață închisă orientată (Σ).

Un cîmp vectorial $\boldsymbol{v}(P)$ diferențiabil în domeniul D se numește *solenoidal* dacă $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ și *irotațional* sau *lamelar* dacă $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$.

Cîmpul vectorial $\boldsymbol{v}(P)$ este *biscalar* dacă există o funcție $\lambda(P)$ derivabilă și o funcție $F(P)$ de două ori diferențiabilă, așa încît

$$\boldsymbol{v} = \lambda \operatorname{grad} F.$$

Formule de calcul:

1. $\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \psi$.
2. $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi$.
3. $\operatorname{div}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \operatorname{div} \boldsymbol{v}$.
4. $\operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{v}) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \operatorname{grad} \varphi$.
5. $\operatorname{div}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} - \mathbf{u} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$.
6. $\operatorname{rot}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$.
7. $\operatorname{rot}(\varphi \boldsymbol{v}) = \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \operatorname{grad} \varphi$.
8. $\operatorname{grad}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{v}$,

unde ∇ este operatorul diferențial vectorial al lui Hamilton:

$$\nabla = \boldsymbol{i} \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

9. $\operatorname{rot}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{v}$.
10. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{v}) - \Delta \boldsymbol{v}$.

Dacă (Σ) este o suprafață închisă ce mărginește domeniul Ω și dacă:

a) o dreaptă paralelă la axele de coordonate intersectează pe (Σ) în cel mult două puncte;

b) Ω se proiectează pe xOy după un domeniu D și cilindrul proiectant al lui Ω cu generatoarele paralele cu Oz este tangent la Ω în lungul unei curbe (Γ) care împarte pe (Σ) în două suprafețe, (analog pentru planele yOz și zOx);

c) (Σ) este bilaterală și formată dintr-un număr finit de porțiuni netede;

avem următoarele formule integrale:

11. $$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{n}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\omega;$$

(formula integrală a divergenței)

12. $$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{n}\varphi\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{grad}\varphi\,\mathrm{d}\omega;$$

(formula integrală a gradientului)

13. $$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\omega;$$

(formula integrală a rotorului)

14. $$\iint_{\Sigma} \varphi\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_{\Omega} (\operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}\psi + \varphi\Delta\psi)\,\mathrm{d}\omega;$$

(prima formulă integrală a lui Green)

15. $$\iint_{\Sigma} \left(\varphi\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}} + \psi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}\sigma = \iiint_{\Omega} (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,\mathrm{d}\omega.$$

(a doua formulă integrală a lui Green)

Dacă (S) este o porțiune de suprafață bilateră orientată, având aria limitată de conturul rectificabil (Γ) reprezentată prin ecuațiile parametrice $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ unde punctul (u, v) parcurge în planul respectiv un domeniu D în care funcțiile x, y, z sînt diferențiabile, avem formula integrală a lui Stokes.

16. $$\int_{\Gamma} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{S} \boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\sigma.$$

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME

2.1. Să se calculeze gradientul următoarelor funcţii :

1. $\varphi(r) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{r} + r^n$,
2. $\varphi(r) = \ln \frac{1}{r}$,
3. $\varphi(r) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r})$,
4. $\varphi(r) = x^3 - 2x^2 + xy + 3y^2 + xz - z^3$.
5. $\varphi(r) = f(x + y + z,\ \alpha x + \beta y + \gamma z)$,

unde $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ sînt vectori constanţi, $\boldsymbol{r}$ vectorul de poziţie al punctului curent din spaţiu, α, β, γ constante arbitrare.

2.2. Să se calculeze

1. grad $[(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}|]$,
2. div $[(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}]$,
3. div $[(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{r}]$,
4. rot $[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\varphi(r)]$,
5. rot $[(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r} + \mathrm{rot}(\boldsymbol{a}\varphi(r))]$,
6. rot $[\boldsymbol{r} \times \mathrm{grad}\ \varphi(r)]$,

unde $\boldsymbol{a}$ este un vector constant iar φ o funcţie arbitrară de punct.

2.3. Se dă cîmpul scalar $\varphi(r) = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}}{r^2}$, $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, iar $\boldsymbol{r}$ vectorul de poziţie al punctului curent din spaţiu. Să se calculeze unghiul dintre gradienţii acestui cîmp în punctele $A(2, 1, 1)$ şi $B(0, 1, -1)$.

2.4. Se dă cîmpul scalar $\varphi(r) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ fiind vectori constanţi, iar $\boldsymbol{r}$ vectorul de poziţie al punctului curent din spaţiu.

a) Să se determine suprafaţa de nivel ce trece prin $A(1, 0, 2)$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se scrie derivata după o direcție $\boldsymbol{s}$ a funcției $\varphi(r)$, arătîndu-se că nu depinde de punct, ci numai de direcția $\boldsymbol{s}$.

c) Să se calculeze derivata după direcția $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

2.5. Fie cîmpul scalar

$$\varphi(r) = (\boldsymbol{ar})^2 + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})^2, \ \boldsymbol{a} = \text{vector unitar constant.}$$

a) Să se determine suprafața de nivel ce trece prin $A(1,2,3)$.

b) Să se calculeze derivata după direcția de parametrii directori $(1, 3, 0)$.

2.6. Se dă cîmpul scalar

$$\varphi(r) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r}), \ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = \text{vectori constanți.}$$

a) Să se calculeze suprafața de nivel ce trece prin origine.

b) Să se arate că derivata după o direcție $\boldsymbol{s}$ a cîmpului φ este nulă dacă $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{s}$ formează un triedru tridreptunghic.

2.7. Să se calculeze derivata cîmpului vectorial definit prin vectorul

$$\boldsymbol{v} = xy^2\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} + z(x^2 + y^2)\,\boldsymbol{k},$$

după direcția de parametri directori $(1, 3, -1)$.

2.8. Să se determine liniile de cîmp ale cîmpului vectorial definit prin vectorul

$$\boldsymbol{v} = x(y^3 - x^3)\,\boldsymbol{i} + y(y^3 - x^3)\,\boldsymbol{j} - z(y^3 - x^3)\,\boldsymbol{k}$$

și suprafața de cîmp ce trece prin curba de ecuații $x = 2y$, $yz = 1$.

2.9. Să se determine liniile de cîmp ale cîmpului vectorial definit prin vectorul

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{ar})\,(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{br})\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}), \ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = \text{constanți}$$

și suprafața de cîmp ce trece prin cercul : $\boldsymbol{ar} = r^2$, $\boldsymbol{ar} + \boldsymbol{br} = h^2$, ($h$ = const.).

2.10. Se dă cîmpul vectorial definit prin vectorul

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times \operatorname{grad} f, \text{ cu } f = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se determine mărimea și direcția cîmpului $\boldsymbol{v}$ în punctele $A(1, 0, 1)$ și $B(2, 1, 0)$ dacă $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

b) Să se determine liniile de cîmp.

2.11. Fie cîmpul vectorial definit prin vectorul

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u}(r),$$

cu $\boldsymbol{a}$ vector unitar.

Să se verifice relațiile:

1. $$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma + \boldsymbol{a} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, d\omega = \iiint_{\Omega} \frac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{a}}\, d\omega.$$

2. $$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\, d\sigma + \boldsymbol{a} \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}\, d\omega = 0.$$

3. $$\iint_{\Sigma} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\, d\sigma + \boldsymbol{a} \times \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}\, d\omega = -\iiint_{\Omega} \frac{d(\operatorname{rot} \boldsymbol{u})}{d\boldsymbol{a}}\, d\omega.$$

2.12. Să se demonstreze relațiile:

1. $$\iint_{\Sigma} \varphi \frac{d\varphi}{d\boldsymbol{n}}\, d\sigma = -\iiint_{\Omega} |\operatorname{grad} \varphi|^2\, d\omega.$$

2. $$\iint_{\Sigma} \frac{d\varphi}{d\boldsymbol{n}}\, d\sigma = 0.$$

3. $$\iint_{\Sigma} \varphi \operatorname{grad} \psi \boldsymbol{n}\, d\sigma = \iint_{\Sigma} \psi \operatorname{grad} \varphi \boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

4. $$\int_{\Gamma} \psi \operatorname{grad} \varphi\, d\boldsymbol{r} = -\int_{\Gamma} \varphi \operatorname{grad} \psi\, d\boldsymbol{r} =$$

$$= \iint_{s_{\Gamma}} \frac{\varphi \operatorname{grad} \psi \times \psi \operatorname{grad} \varphi}{\varphi\psi} \boldsymbol{n}\, d\sigma,$$

funcțiile φ și ψ fiind armonice, iar suprafețele $\varphi = \text{const.}$ și $\psi = \text{const.}$ ortogonale.

Scanned with OKEN Scanner

2.13. Să se arate că pentru orice domeniu Ω mărginit de suprafața închisă Σ, $\boldsymbol{u}$ și $\boldsymbol{v}$ fiind două cîmpuri vectoriale oarecare avem :

$$1.\ \iint_{\Sigma} \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n})\, d\sigma + \iiint_{\Omega} \operatorname{grad}(\boldsymbol{uv})\, d\omega = \iiint_{\Omega} [(\boldsymbol{u}\nabla)\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{u}]\, d\omega.$$

$$2.\ \iint_{\Sigma} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{vn})\, d\sigma - \iiint_{\Omega} [(\boldsymbol{v}\nabla)\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{v}]\, d\omega = 0.$$

2.14. Să se calculeze circulația vectorului

$$\boldsymbol{v} = (x + y - 2z)\,\boldsymbol{i} + (z + x)\,\boldsymbol{j} - (2x - y + 3z)\,\boldsymbol{k}$$

pe conturul $ABCA$, punctele A, B, C fiind obținute prin intersecția sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cu semiaxele pozitive Ox, Oy și Oz. Să se verifice rezultatul obținut.

2.15. Să se calculeze circulația vectorului

$$\boldsymbol{v} = (y - 2z)\,\boldsymbol{i} + (x - z)\,\boldsymbol{j} + (2x - y)\,\boldsymbol{k}$$

pe curba (C) de intersecție a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cu planul $x - y + z = 0$.

2.16. Să se calculeze circulația cîmpului vectorial

$$\boldsymbol{v} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$$

pe curba $(C) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $z \geqslant 0$, $a > 0$, parcursă în sens direct dinspre partea pozitivă a axei Ox.

2.17. În E_3 se dau punctele $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ și $C(0, 0, 1)$ și vectorul

$$\boldsymbol{v} = (z - y)\,\boldsymbol{i} + (x - z)\,\boldsymbol{j} + (y - x)\,\boldsymbol{k}.$$

1. Să se calculeze circulația vectorului $\boldsymbol{v}$ de-a lungul perimetrului triunghiului ABC.

2. Să se calculeze fluxul vectorului $\boldsymbol{u} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ prin suprafața triunghiului ABC.

Scanned with OKEN Scanner

3. Să se calculeze fluxul vectorului $\boldsymbol{u}$ prin suprafața triedrului $OABC$.

2.18. Să se calculeze fluxul vectorului

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{u}}{p}$$

prin suprafața elipsoidului (Σ) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, unde p este distanța de la origine la planul tangent într-un punct al elipsoidului, iar $\boldsymbol{u}$ un vector unitar în direcția normalei la elipsoid în acel punct.

2.19. Să se calculeze $\iint\limits_{\Sigma} (\operatorname{rot} \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{n}\, d\sigma$, unde $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} + (x - 2xz)\,\boldsymbol{j} - xy\boldsymbol{k}$, iar (Σ) este suprafața sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$.

2.20. Se consideră cîmpul vectorial

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}(r))\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}),$$

$\boldsymbol{a}$ fiind un vector constant, iar $\boldsymbol{u}$ o funcție arbitrară de punct.

1. Să se determine $\boldsymbol{u}(r)$ așa încît $\boldsymbol{v}$ să fie solenoidal.

2. Dacă $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP}$ să se calculeze circulația cîmpului $\boldsymbol{v}$ pe un cerc (C) cu centrul în punctul fix A și situat într-un plan perpendicular pe $\boldsymbol{OA}$.

3. Să se calculeze fluxul cîmpului vectorial $\boldsymbol{v}$ prin interiorul unui cerc de diametru OA.

2.21. Se dă cîmpul vectorial

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}[r + \varphi(r)].$$

1. Să se determine funcția $\varphi(r)$ astfel ca $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$.

2. Să se arate că $\boldsymbol{v}$ derivă dintr-un potențial a cărui expresie se cere.

2.22. Se dă cîmpul vectorial

$$\boldsymbol{v} = yz\,(2x + y + z)\,\boldsymbol{i} + zx(x + 2y + z)\,\boldsymbol{j} + xy(x + y + 2z)\,\boldsymbol{k}.$$

Să se arate că $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$ și să se determine funcția de forță.

Scanned with OKEN Scanner

2.23. În sistemul de coordonate cilindrice se dă cîmpul vectorial

$$\boldsymbol{v} = \frac{z}{\rho}\,\boldsymbol{u}_0 + \theta \boldsymbol{u}_z.$$

1. Să se determine funcţia de forţă a cîmpului $\boldsymbol{v}$.
2. Este cîmpul vectorial $\boldsymbol{v}$ solenoidal?

2.24. Se dă cîmpul vectorial

$$\boldsymbol{v} = r^{\alpha}\boldsymbol{r}.$$

1. Să se determine valorile parametrului real α pentru care $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$. În acest caz să se determine un potenţial vector şi să se stabilească legătura lui $\boldsymbol{v}$ cu unghiul solid sub care se vede o suprafaţă (S) de frontieră (Γ).
2. Pentru ce valori ale lui α cîmpul vectorial $\boldsymbol{v}$ este irotaţional? Să se determine funcţia de forţă a cîmpului $\boldsymbol{v}$.

2.25. Să se determine suprafeţele ortogonale liniilor de cîmp pentru următoarele cîmpuri vectoriale:

1. $\boldsymbol{v} = z[(x-1)\,e^x - e^y]\,\boldsymbol{i} + xze^y\,\boldsymbol{j} - x(e^x + e^y)\,\boldsymbol{k}$.
2. $\boldsymbol{v} = [(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{r}]\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, $a,\ b = \text{const.}$
3. $\boldsymbol{v} = [2(y^2+z^2) + yz]\,\boldsymbol{i} + [2(x^2+z^2) + xz]\,\boldsymbol{j} + [2(x^2+y^2) + xy]\,\boldsymbol{k}$.
4. $\boldsymbol{v} = \sin\theta\,\boldsymbol{u}_r + \cos\theta\,\boldsymbol{u}_0 - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,\boldsymbol{u}_\varphi$.

Să se scrie $\boldsymbol{v}$ sub forma $\boldsymbol{v} = \lambda \operatorname{grad} F$.

2.26. Să se calculeze potenţialul newtonian de simplu strat pentru placa omogenă ($\mu = \text{const.}$) din planul xOy limitată de dreptele $x = 0$, $y = 1$, $y = \sqrt{3}$, $y = x$, în punctul $M(0, 0, z)$.

2.27. Să se determine potenţialul newtonian de volum pentru un domeniu omogen ($\mu = \text{const.}$) Ω mărginit de emisfera superioară $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ şi conul $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ de densitate μ în punctul $M(0, 0, z)$, $z > R$.

Scanned with OKEN Scanner

2.1.1. Avem $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ și $\boldsymbol{ar} = a_x x + a_y y + a_z z$.

Deci grad $\boldsymbol{ar} = \boldsymbol{a}$, grad $r^n = nr^{n-1}$ grad $r = nr^{n-1}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$, de unde

$$\text{grad } \varphi = \text{grad}(\boldsymbol{ar}) + \text{grad } r^n = \boldsymbol{a} + nr^{n-2}\boldsymbol{r}.$$

2. Avem $\varphi(r) = -\ln r$, cu $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ și

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{y}{r^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{z}{r^2},$$

deci

$$\text{grad } \varphi = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}.$$

3. grad $\varphi(r) = \text{grad}\,[(\boldsymbol{ab})r^2 - (\boldsymbol{ar})(\boldsymbol{br})] + \text{grad}\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r}) = 2(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{br}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ar}) + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$
deoarece $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

4. grad $\varphi = (3x^2 - 2x + y + z)\,\boldsymbol{i} + (x + 6y)\,\boldsymbol{j} + (x - 3z^2)\,\boldsymbol{k}$.

5. Avem $\varphi(r) = f(g_1(x, y, z), g_2(x, y, z))$, de unde rezultă grad $\varphi = \dfrac{\partial f}{\partial g_1}$ vers $\boldsymbol{r} + \dfrac{\partial f}{\partial g_2}\boldsymbol{a}$, unde s-a notat $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}$.

2.2.1. Aplicăm formula de calcul pentru grad $(\varphi\psi)$.

Avem grad $[(\boldsymbol{ar})|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}|] = (\boldsymbol{ar})$ grad $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}| + |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}|$ grad $(\boldsymbol{ar}) = (\boldsymbol{ar})\dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}|} + |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}|\boldsymbol{a}$.

2. Formula de calcul pentru div $(\varphi\boldsymbol{v})$ ne dă:

$$\text{div}\,[(\boldsymbol{ar})\boldsymbol{a}] = (\boldsymbol{ar})\,\text{div}\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\,\text{grad}\,(\boldsymbol{ar}) = 4(\boldsymbol{ar}).$$

3. Se aplică formula (5) și obținem div $[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{r}] = \boldsymbol{r}\,\text{rot}\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\,\text{rot}\,\boldsymbol{r} = 2(\boldsymbol{ar})$.

Scanned with OKEN Scanner

4. $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\,\varphi(r)]=\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})+\operatorname{rot}[\boldsymbol{r}\,\varphi(r)]$

și cu ajutorul formulei (7) obținem

$\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\,\varphi(r)]=2\boldsymbol{a}+\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}\times\operatorname{grad}\varphi=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r}\times\operatorname{grad}\varphi=2\boldsymbol{a}.$

5. $\operatorname{rot}[(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}+\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\,\varphi(r)]=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}\times\operatorname{grad}\varphi.$

6. Aplicăm formula de calcul (9) și obținem :

$\operatorname{rot}[\boldsymbol{r}\times\operatorname{grad}\varphi]=\boldsymbol{r}\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)-\operatorname{grad}\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{r}+(\operatorname{grad}\varphi\Delta)\boldsymbol{r}-$
$-(\boldsymbol{r}\Delta)\operatorname{grad}\varphi=\boldsymbol{r}\Delta\varphi-3\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\varphi-(\boldsymbol{r}\Delta)\operatorname{grad}\varphi=$
$=\boldsymbol{r}\,\Delta\varphi-2\operatorname{grad}\varphi-(\boldsymbol{r}\Delta)\operatorname{grad}\varphi.$

2.3. $\operatorname{grad}\varphi=(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\operatorname{grad}\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})=-2\frac{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^4}+\frac{\boldsymbol{a}}{r^2}$

și

$$\operatorname{grad}_A\varphi=-\frac{1}{18}(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}),\ \operatorname{grad}_B\varphi=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}).$$

Avem

$$\cos\theta=\frac{\operatorname{grad}_A\varphi\cdot\operatorname{grad}_B\varphi}{|\operatorname{grad}_A\varphi||\operatorname{grad}_B\varphi|}=-\frac{5}{9}.$$

2.4. a) Suprafețele de nivel sînt date de ecuația

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r})=k,\ (k=\text{const.})$$

care se mai scrie $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{r}=k$ și reprezintă plane perpendiculare pe $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Planul perpendicular pe $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ ce trece prin A(1, 0, 2) este

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c},\ \text{cu}\ \boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}.$$

b) Avem

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}=\boldsymbol{s}\operatorname{grad}\varphi=\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

c) $$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.5. a) Suprafețele de nivel sînt sfere cu centrul în origine deoarece $\varphi = a^2r^2 = r^2$, deci $r^2 = \text{const.}$, iar suprafața de nivel ce trece prin punctul A este sfera de ecuație

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14.$$

b) Avem $\boldsymbol{s} = \dfrac{\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}}{\sqrt{10}}$ și $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{s}\,\mathrm{grad}\,\varphi.$

Dar $\mathrm{grad}\,\varphi = 2\boldsymbol{r}$, deci $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}} = 2\boldsymbol{r}\boldsymbol{s} = \dfrac{2}{\sqrt{10}}(x + 3y).$

2.6. a) Dacă vectorii $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ sînt coliniari, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = 0$ și suprafețele de nivel $\varphi = \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})^2 = \text{const.}$ sînt cilindrii de rotație în jurul unei axe ce trece prin origine și este paralelă cu $\boldsymbol{a}$.

Dacă $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \neq 0$, $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} = 0$ suprafețele de nivel $(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{r}) = \text{const.}$ reprezintă cilindrii hiperbolici omotetici.

Dacă $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \neq 0$, $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} \neq 0$ suprafețele de nivel $(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{r}) = \text{const.}$ reprezintă o familie de cuadrice.

Suprafața de nivel ce trece prin origine este conul cu vîrful în origine de ecuație $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r}) = 0$.

b) $$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{s}\,\mathrm{grad}\,\varphi = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{s}) - (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{s})\,(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r}) =$$

$$= 2(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{b}\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{s})\,(\boldsymbol{b}\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{s}\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}) = 0.$$

2.7. Dacă $\boldsymbol{v} = v_x\,\boldsymbol{i} + v_y\,\boldsymbol{j} + v_z\,\boldsymbol{k}$, $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{i}\,\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{j}\,\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}} +$

$+ \boldsymbol{k}\,\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}$ sau $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{i}\,(\boldsymbol{s}\,\mathrm{grad}\,v_x) + \boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{s}\,\mathrm{grad}\,v_y) + \boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{s}\,\mathrm{grad}\,v_z),$

deci ținînd seama că $\boldsymbol{s} = \dfrac{1}{\sqrt{11}}(\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$ rezultă

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}} = \frac{y}{\sqrt{11}}(y + 6x)\,\boldsymbol{i} + \frac{x}{\sqrt{11}}(2y + 3x)\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{11}}(2xz + 6yz - x^2 - y^2)\boldsymbol{k}.$$

2.8. Sistemul diferențial al liniilor de cîmp este

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(y^3 - x^3)} = \frac{\mathrm{d}y}{y(y^3 - x^3)} = \frac{\mathrm{d}z}{z\,(y^3 - x^3)}$$

Scanned with OKEN Scanner

și se reduce la

$$\frac{x^2\,dx + y^2\,dy}{x^3 + y^3} = \frac{dz}{z}$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 2\frac{dz}{z}.$$

Integrînd obținem ecuațiile liniilor de cîmp

$$x^3 + y^3 = C_1 z^3, \quad xy = C_2 z^2, \quad (C_1, C_2 = \text{const.}).$$

Suprafața de cîmp ce trece prin curba dată se obține punînd condiția ca sistemul: $x = 2y$, $yz = 1$, $x^3 + y^3 = C_1 z^3$, $xy = C_2 z^2$ să fie compatibil. Rezultă suprafața de cîmp

$$2\sqrt{2}\,(x^2 + y^2) - 9xy\sqrt{xy} = 0.$$

2.9. Ecuația diferențială vectorială a liniilor de cîmp este $\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{r} = 0$. Scriind vectorul $\boldsymbol{v} = [(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{r}] \times \boldsymbol{r}$, rezultă că vectorii $\boldsymbol{r}$ și $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{r}$ nu sînt coliniari ci perpendiculari, deci ecuația liniilor de cîmp

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})(\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r})(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r} = 0$$

are loc numai în condițiile

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})(\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}) = 0 \\ \boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r} = 0, \end{cases}$$

care se mai scriu

$$\frac{d(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}} = \frac{d(\boldsymbol{b}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{b}\boldsymbol{r}}, \quad \boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r} = 0.$$

Ecuațiile liniilor de cîmp sînt $\boldsymbol{a}\boldsymbol{r} = C_1(\boldsymbol{b}\boldsymbol{r})$, $r^2 = C_2$ și sînt cercuri.

Suprafața de cîmp ce trece prin cercul dat se obține din condiția de compatibilitate a sistemului $\boldsymbol{a}\boldsymbol{r} = C_1(\boldsymbol{b}\boldsymbol{r})$, $r = C_2$, $\boldsymbol{a}\boldsymbol{r} = r^2$, $\boldsymbol{a}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{r} = h^2$, care este $C_2(1 + C_1) = C_1 h^2$, deci

$$r^2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{r}) - h^2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}) = 0.$$

2.10. a) Avem $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad}\,[\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})^2] = 2\,[\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{a}]$, deci $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}$.

$\boldsymbol{v}_A = 2(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k})$ și are direcția de cosinusuri directoare

$\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$, iar $\boldsymbol{v}_B = -2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ și are direcția de cosinusuri directoare $\frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{-\sqrt{6}}{6}$.

b) Liniile de cîmp sînt cercurile de ecuații

$$r^2 = C_1, \ \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r} = C_2, \ (C_1, C_2 = \text{const.}).$$

2.11. Utilizînd formula integrală a rotorului

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\omega$$

obținem

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = -\iiint_{\Omega} \operatorname{rot}\, \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\omega = -\iiint_{\Omega} [\boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{a} +$$

$$+ (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{u}]\, d\omega = -\boldsymbol{a}\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}\omega + \iiint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}\, \mathrm{d}\omega.$$

2. Aplicăm formula integrală a lui Gauss Ostrogradski (11)

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = \iiint_{\Omega} (\boldsymbol{u} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\omega = -\boldsymbol{a}\iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}\omega.$$

3. Vom utiliza formula integrală a gradientului (1.3),

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\, d\sigma = \iint_{\Omega} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\omega.$$

Avem

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\omega = -\iiint_{\Omega} \operatorname{grad} (\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\omega =$$

$$= -\iiint_{\Omega} [\boldsymbol{a} \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}_{\nabla}) \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_{\nabla})\boldsymbol{a}]\, \mathrm{d}\omega =$$

$$= -\iiint_{\Omega} \boldsymbol{a} \times \operatorname{rot}\, (\operatorname{rot}\, \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\omega - \iiint_{\Omega} (\boldsymbol{a}_{\nabla}) \operatorname{rot} \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}\omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.12.1 $\iint\limits_{\Sigma} \varphi \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} \varphi \operatorname{grad} \varphi\, \boldsymbol{n}\, d\sigma =$

$= \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} (\varphi \operatorname{grad} \varphi)\, d\omega = \iiint\limits_{\Omega} [(\operatorname{grad} \varphi)^2 + \varphi \Delta \varphi]\, d\omega =$

$= \iiint\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} \varphi)^2\, d\omega.$

2. $\iint\limits_{\Sigma} \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi)\, d\omega = \iiint\limits_{\Omega} \Delta \varphi\, d\omega = 0.$

3. $\iint\limits_{\Sigma} \varphi \operatorname{grad} \psi\, \boldsymbol{n}\, d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} (\varphi \operatorname{grad} \psi)\, d\omega =$

$= \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi\, d\omega = 0,$ deoarece suprafețele $\varphi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$ sînt ortogonale, deci $\operatorname{grad} \varphi . \operatorname{grad} \psi = 0$. Analog pentru cealaltă integrală.

4. $\int_{\Gamma} \psi \operatorname{grad} \varphi\, d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{s} \operatorname{rot} (\varphi \operatorname{grad} \psi)\, \boldsymbol{n}\, d\sigma =$

$= \iint\limits_{s} (\operatorname{grad} \psi \times \operatorname{grad} \varphi)\, \boldsymbol{n}\, d\sigma = -\iint\limits_{s} (\operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \psi)\, \boldsymbol{n}\, d\sigma =$

$= -\int_{\Gamma} \varphi \operatorname{grad} \psi\, d\boldsymbol{r},$

dar

$$\iint\limits_{s} \frac{\varphi \operatorname{grad} \psi \times \psi \operatorname{grad} \varphi}{\varphi \psi}\, \boldsymbol{n}\, d\sigma = \iint\limits_{s} (\operatorname{grad} \psi \times \operatorname{grad} \varphi)\, \boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

2.13.1. Fie $\boldsymbol{a}$ un vector constant arbitrar și $\boldsymbol{I} = \iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{u} \times$

$\times\, (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}) \mathrm{d}\sigma$. Proiectînd $\boldsymbol{I}$ pe acest vector avem

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{I} = \iint\limits_{\Sigma} [(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{a}]\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\,[(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{a}]\,\mathrm{d}\omega =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} \boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\nabla)\,\boldsymbol{v} - \operatorname{grad}(\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v})]\,\mathrm{d}\omega =$$

$$= \boldsymbol{a} \iiint\limits_{\Omega} [\boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\nabla)\,\boldsymbol{v} - \operatorname{grad}\,(\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v})]\,\mathrm{d}\omega.$$

Vectorul $\boldsymbol{a}$ fiind arbitrar, rezultă egalitatea cerută.

2. Fie $\boldsymbol{I}_1 = \iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}\sigma$. Procedînd ca la 1, obținem

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{I}_1 = \iint\limits_{\Sigma} (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\,[(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{v}]\,\mathrm{d}\omega,$$

de unde rezultă egalitatea cerută.

2.14. $\Gamma = \int_{ABCA} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{AB} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{BC} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{CA} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$

Scriind ecuațiile parametrice ale arcului AB

$$x = a\cos\,\theta,\ y = a\sin\,\theta,\ z = 0,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

rezultă

$$\mathrm{d}x = -a\sin\,\theta\,\mathrm{d}\theta,\ \mathrm{d}y = a\cos\,\theta\,\mathrm{d}\theta,\ \mathrm{d}z = 0$$

și

$$\int_{AB} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta - \sin\theta - \sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta = -\frac{a^2}{2}.$$

Pentru arcul BC: $x = 0,\ y = a\cos\theta,\ z = a\sin\theta,\ 0 \leqslant 0 \leqslant \frac{\pi}{2}$

avem

$$\int_{BC} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta - \sin^2\theta - 3\sin\theta\cos\theta)\,d\theta = -\frac{3a^2}{2}.$$

Pe arcul CA : $x = a\sin\theta$, $y = 0$, $z = a\cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ și

$$\int_{AC} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\theta - \cos 2\theta)\,d\theta = 2a^2.$$

Deci

$$\Gamma = 0.$$

Transformînd într-o integrală de suprafață avem

$$\int_{ABCA} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{n}\,d\sigma, \text{ dar } \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0$$

și rezultatul obținut $ABCA$ se verifică.

2.15. Avem $\int_C \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = \int_C (y-2z)\,dx + (x-z)\,dy + (2x-y)\,dz$, unde (C) este de ecuație $2x^2 - 2y^2 + 2xy = a^2$ (conică), fiind situată în planul $x - y + z = 0$.

Luăm ca extremitate a curbei punctul $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ și ținînd seama că ecuația curbei (C) se mai scrie $3(x-y)^2 + (x+y)^2 = 2a^2$, scriind reprezentarea parametrică

$$x - y = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a\cos\theta,\quad x + y = \sqrt{2}\,a\sin\theta,\quad \frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

obținem

$$\Gamma = \frac{a^2}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{13\pi}{6}} (\sin^2\theta + 3\cos^2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta)\,d\theta = \frac{4a^2\pi}{3}.$$

2.16. $\Gamma = \int_C x^2dx + y^2dy + z^2dz$.

Cu reprezentarea parametrică

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos\theta),\ y = \frac{a}{2}\sin\theta,\ z = \frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem

$$\Gamma = \frac{a^2}{8}\int_0^{2\pi}\left[-\sin^3\theta + \sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta + \cos\frac{\theta}{2} + \right.$$

$$\left. + \cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\right]\mathrm{d}\theta = \frac{\pi a^3}{4}.$$

2.17.1. $\Gamma = \int_{ABCA} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{AB} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{BC} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{CA} \boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$

Pe dreapta AB de ecuații $x + y = 1$, $z = 0$ avem $\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, dar $y = 1 - x$, deci $\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\mathrm{d}x$ și

$$\int_{AB} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_1^0 \mathrm{d}x = 1.$$

Analog

$$\int_{BC} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{CA} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 1.$$

Rezultă $\Gamma = 3$.

2. Ecuația planului $ABCA$ este $x + y + z - 1 = 0$; normala va fi dirijată după direcția vectorului grad $(x + y + z) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, deci

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

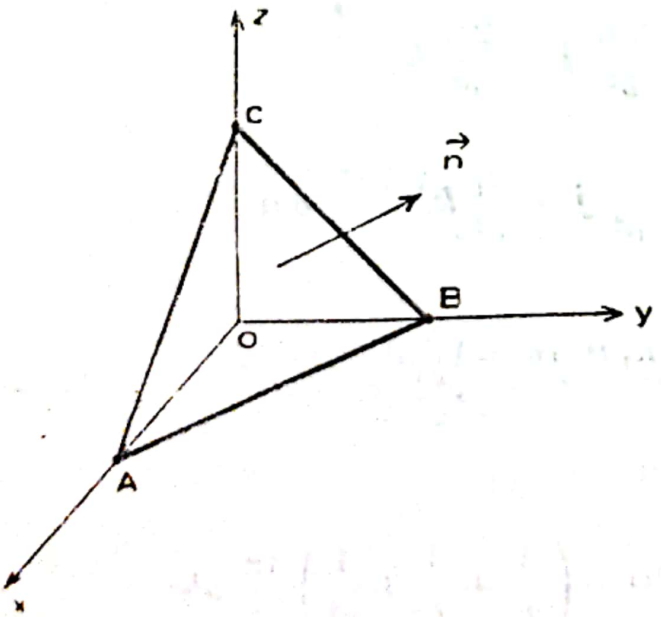


Fig. 2.17

Avem

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 2(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

și

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Fluxul va fi

$$\Phi = \iint_\Sigma \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \iint_{ABC} 2\sqrt{3}\,\mathrm{d}\sigma = 6\iint_{0AB}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3.$$

$$3.\ \Phi = \iint_{OABC} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = \iint_{OAB} \boldsymbol{u}\, \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma + \iint_{OBC} \boldsymbol{u}\, \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma + \iint_{OCA} \boldsymbol{u}\, \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma,$$

versorul normalei fiind $\boldsymbol{k}$.

$$\iint_{OAB} \boldsymbol{u}\, \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = 2 \iint_{OAB} \mathrm{d}\sigma = 2 \text{ aria } OAB = 1.$$

$$\iint_{OBC} \boldsymbol{u}\, \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = \iint_{OCA} \boldsymbol{u}\, \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = 1.$$

Rezultă $\Phi = 3$.
Punctele 2 și 3 confirmă rezultatul de la 1.

2.18. Planul tangent într-un punct $Q(x_1, y_1, z_1)$ la elipsoid are ecuația

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1,$$

iar

$$p = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x_1^2}{a^4} + \dfrac{y_1^2}{b^4} + \dfrac{z_1^2}{c^4}}}.$$

Dacă $f(x, y, z) = 0$ este ecuația elipsoidului, un vector a cărui direcție este direcția normalei în Q este dat de $(\operatorname{grad} f)_Q$, deci

$$\boldsymbol{n}_1 = \frac{2x_1}{a^2}\boldsymbol{i} + \frac{2y_1}{b^2}\boldsymbol{j} + \frac{2z_1}{c^2}\boldsymbol{k},$$

iar

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}_1|} = p\left(\frac{x_1}{a^2}\boldsymbol{i} + \frac{y_1}{b^2}\boldsymbol{j} + \frac{z_1}{c^2}\boldsymbol{k}\right) = \frac{1}{2} p\, \boldsymbol{n}_1.$$

Avem

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \frac{\boldsymbol{u}}{p} \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \boldsymbol{n}_1\, \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = \iiint_{\Sigma} \operatorname{div} \boldsymbol{n}_1 \mathrm{d}\omega,$$

unde Ω este volumul elipsoidului.
Rezultă

$$\Phi = 2 \iiint_{\Omega} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \mathrm{d}\omega = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \frac{4\pi}{3} abc.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.19. $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k}$. Normala fiind dirijată după direcția vectorului grad $(x^2 + y^2 + z^2) = 2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$, versorul ei va fi

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{a}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}).$$

Proiecția suprafeței (Σ) pe planul (xOy) este cercul $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$
deci

$$I = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{n}\, d\sigma = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{n} \frac{dx\, dy}{|\boldsymbol{n}\boldsymbol{k}|} =$$

$$= \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{3(x^2 + y^2) - 2a^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dy dx.$$

Trecem la coordonatele polare:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \frac{3\rho^2 - 2a^2}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}\, \rho d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \left(-3\rho\sqrt{a^2 - \rho^2} + \frac{a^2\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \right) d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(a^2 - \rho^2)^{3/2} - a^2\sqrt{a^2 - \rho^2}]_0^a d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^3 - a^3) d\theta = 0.$$

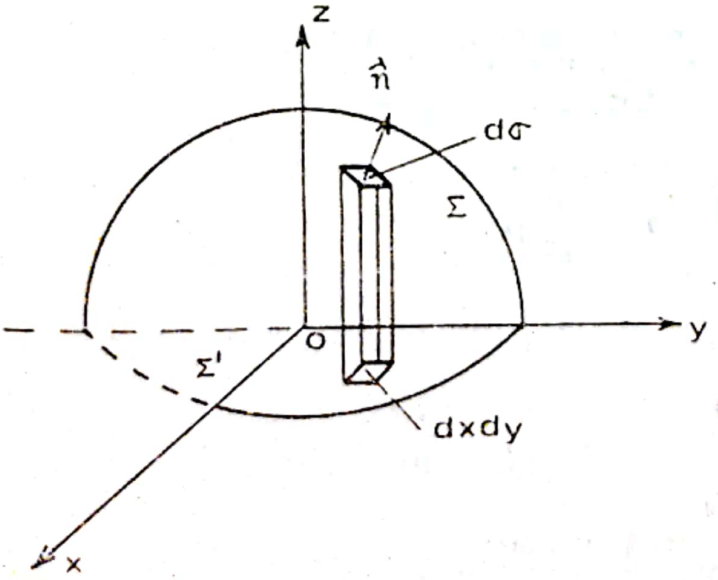


Fig. 2.19

Calculul se putea face și cu ajutorul formulei Gauss Ostrogradski

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{n}\, d\sigma =$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} (\operatorname{rot} \boldsymbol{v})\, d\omega = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.20.1. $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div}(\boldsymbol{a}\,u)(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) \operatorname{grad} (\boldsymbol{a}\,u) = 0.$
Rezultă $\operatorname{grad} (\boldsymbol{a}\,u) = \lambda \boldsymbol{r}.$

2. $\Gamma = \int_C \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r}$ unde $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{AP}.$

Dacă notăm cu ρ raza cercului (C) pe (C) avem

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r} = a^2,\ |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}| = a\rho$$

și

$$\Gamma = \lambda \int_C (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r} = \lambda a^3 \rho \int_C ds = 2\pi\lambda a^3 \rho.$$

3. În planul cercului de diametru OA avem

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r} = ar\cos\theta,\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}\,ar\sin\theta,$$

unde $\boldsymbol{n}$ este versorul normalei la plan.

$$\Phi = \lambda \iint_\Sigma (\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})\boldsymbol{n}\,d\sigma = \lambda a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \left(\int_0^{a\cos\theta} r^2 dr \right) d\theta = 0,$$

rezultat așteptat ținînd seama de 1.

2.21.1. $\operatorname{div} \boldsymbol{r}\,(r + \varphi(r)) = 0$ conduce la ecuația diferențială

$$\varphi'(r)r + 3\varphi(r) + 4r = 0$$

cu soluția

$$\varphi(r) = -r + \frac{c}{r^3},\ c = \text{const.},$$

deci

$$\boldsymbol{v} = \left(-r + \frac{c}{r^3} \right) \boldsymbol{r}.$$

2. $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$. Funcția Φ al cărei gradient este $\boldsymbol{v}$ se obține deci din

$$d\Phi = \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = [r + \varphi(r)]\,(r dr),$$

adică

$$\Phi = \frac{r^3}{3} + \int r\varphi(r)\,dr.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.22. Fie $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$.

Avem

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} = z(2x + 2y + z)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial y} = x(x + 2y + 2z)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial z} = y(2x + y + 2z),$$

de unde rezultă $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$.

Determinarea funcţiei de forţă revine la găsirea unei funcţii $\Phi(x, y, z)$ aşa încît $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi$. Aceasta conduce la rezolvarea sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = yz\,(2x + y + z),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = xz(x + 2y + z),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = xy(x + y + 2z).$$

Din prima ecuaţie a sistemului deducem

$$\Phi\,(x, y, z) = xyz\,(x + y + z) + f(y, z)$$

care introdusă în ecuaţia a 2-a ne dă

$$\Phi(x, y, z) = xyz(x + y + z) + g(z),$$

funcţie ce trebuie să verifice şi ultima ecuaţie a sistemului, obţinînd

$$\Phi(x, y, z) = xyz\,(x + y + z) + C, \quad (C = \text{const.})$$

2.23.1. În coordonate cilindrice avem

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial z}{\partial z}\right)\boldsymbol{u}_\rho + \left(-\frac{\partial \theta}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{u}_\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \rho}\boldsymbol{u}_z = 0,$$

iar

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\boldsymbol{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\boldsymbol{u}_\theta + \frac{\partial \Phi}{yz}\boldsymbol{u}_z$$

Scanned with OKEN Scanner

și din $v = \operatorname{grad} \Phi$ obținem sistemul de ecuații cu derivate parțiale de ordinul I:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{z}{\rho}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0.$$

Soluția sistemului este $\Phi = \theta z + C$, ($C = \text{const.}$).

2. Avem $v = \operatorname{grad} \Phi$, deci

$$\operatorname{div} v = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \operatorname{div}\left[\frac{z}{\rho} u_\theta + \theta u_z\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{z}{\rho}\right)\right] + \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

2.24. Avem $\operatorname{div} v = (3 + \alpha) r^\alpha$. Pentru $\alpha = -3$, $\operatorname{div} v = 0$. În aceste condiții există un cîmp vectorial w cu $\operatorname{rot} w = v$, deci

$$\frac{xi + yj + zk}{r^3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

de unde obținem o soluție particulară a ecuației $\operatorname{rot} w = v$ luînd $w_3 = 0$, soluție a sistemului de ecuații cu derivate parțiale

$$\frac{\partial w_2}{\partial z} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} = \frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{z}{r^3}.$$

Din prima și a doua ecuație obținem

$$w_2 = -\frac{xz}{r(x^2 + y^2)} + f(x, y)$$

$$w_1 = \frac{yz}{r(x^2 + y^2)} + g(x, y),$$

iar din ultima ecuație rezultă $f = g = 0$. Deci soluția particulară este

$$w = \frac{z}{r(x^2 + y^2)}(yi - xj) = \frac{z}{x^2 + y^2}\frac{r \times k}{r}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin permutări circulare se obțin soluții analoage, astfel pentru $w_1 = 0$ obținem $\boldsymbol{w} = \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{i}}{r}$, iar pentru $w_2 = 0$, $\boldsymbol{w} = \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}}{r}$.

Unghiul solid care se vede, suprafața (S), este

$$\omega = \iint_S \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{r^3}\,\mathrm{d}\sigma,$$

care este tocmai fluxul cîmpului electrostatic $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Unghiul solid este independent de (S) și depinde numai de (Γ). În virtutea teoremei lui Stokes

$$\omega = \int_\Gamma \boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

2. Dacă $\mathbf{v}$ este irotațional atunci există o funcție Φ așa încît grad $\Phi = \boldsymbol{v}$, numită funcție de forță a cîmpului $\mathbf{v}$. Avem

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = r^\alpha x,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = r^\alpha y,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = r^\alpha z.$$

Deoarece

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r},$$

avem

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = r^{\alpha+1}\frac{\partial r}{\partial x},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = r^{\alpha+1}\frac{\partial r}{\partial y},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = r^{\alpha+1}\frac{\partial r}{\partial z},$$

deci Φ poate fi de forma $\frac{r^{\alpha+2}}{\alpha+2}$, cu $\alpha \neq -2$.

Dacă $\alpha = -2$, $\Phi = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Deci pentru oricare alt α funcția Φ există așa încît grad $\Phi = \boldsymbol{v}$. Aceasta arată că $\boldsymbol{v}$ este irotațional, iar Φ este funcția de forță a cîmpului $\boldsymbol{v}$.

2.25.1. Avem rot $\boldsymbol{v} = -2xe^y\boldsymbol{i} + 2xe^x\boldsymbol{j} + 2ze^y\boldsymbol{k}$ și $\mathbf{v}$ rot $\boldsymbol{v} = 0$, deci cîmpul vectorial v este biscalar și admite o familie

de suprafețe ortogonale liniilor de cîmp. Dacă într-un domeniu D există o suprafață (S) ortogonală liniilor de cîmp în fiecare punct al suprafeței (S), rot $\boldsymbol{v}$ este tangent suprafeței, deci suprafețele ortogonale liniilor trebuie căutate printre suprafețele de cîmp ale lui rot $\boldsymbol{v}$.

Liniile de cîmp ale lui rot $\boldsymbol{v}$ sînt soluțiile sistemului

$$\frac{dx}{-xe^y} = \frac{dy}{xe^x} = \frac{dz}{ze^y}$$

și anume

$$e^x + e^y = C_1,\ xz = C_2,\ (C_1, C_2 = \text{const.}).$$

Dar

$$\text{rot}\,\boldsymbol{v} \cdot \text{grad}\,(e^x + e^y) = 0,\ \text{rot}\,\boldsymbol{v}\,\text{grad}\,(xz) = 0,$$

deci în fiecare punct din D vectorii $\boldsymbol{v}$, grad $(e^x + e^y)$, grad (xz) ∈sînt coplanuri, deci putem scrie:

$$\boldsymbol{v} = \alpha\,\text{rgrad}\,(e^x + e^y) + \beta\,\text{grad}\,(xz).$$

Calculînd gradienții și identificînd cu $\boldsymbol{v}$ dat inițial obținem

$$\alpha = xz,\quad \beta = -(e^x + e^y).$$

Ecuația cu diferențiale totale $\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = 0$ se scrie

$$xz\,d(e^x + e^y) - (e^x + e^y)\,d(xz) = 0,$$

iar integrala ei generală este

$$\frac{e^x + e^y}{xz} = c,\quad (c = \text{const.})$$

și reprezintă familia de suprafețe ortogonale liniilor de cimp Cu aceasta putem scrie

$$\boldsymbol{v} = \lambda\,\text{grad}\,\frac{e^x + e^y}{xz}$$

și comparînd cu $\boldsymbol{v}$ dat, se obține $\lambda = x^2z^2$, din

$$\boldsymbol{v} = x^2z^2\,\text{g4ad}\,\frac{e^x + e^y}{xz}.$$

2. Suprafețele ortogonale liniilor de cîmp sînt

$$\frac{\boldsymbol{ar} + \boldsymbol{br}}{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{r}} = C,\quad (C = \text{const.}),$$

Scanned with OKEN Scanner

iar

$$\boldsymbol{v} = [(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}), \boldsymbol{r}]^2 \operatorname{grad} \frac{\boldsymbol{ar} + \boldsymbol{br}}{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{r}}.$$

3. Suprafețele ortogonale sînt

$$\frac{x(y+z) + y(x+z) + z(x+y)}{x+y+z} = C, \quad (C = \text{const.})$$

și

$$\boldsymbol{v} = (x+y+z)^2 \operatorname{grad} \frac{x(y+z) + y(x+z) + z(x+y)}{x+y+z}.$$

4. Suprafețele ortogonale liniilor de cîmp sînt cilindrii parabolici verticali de ecuații

$$r \sin \theta\,(1 + \cos \varphi) = C, \quad (C = \text{const.}).$$

2.26. Fie $P(\xi, \eta, 0) \in \Sigma$ și $M(0, 0, z)$ (fig. 2.26). Potențialul de simplu strat este dat de

$$u(M) = -\iint_{\Sigma} \frac{\mu(P)}{r}\, \mathrm{d}\sigma_P,$$

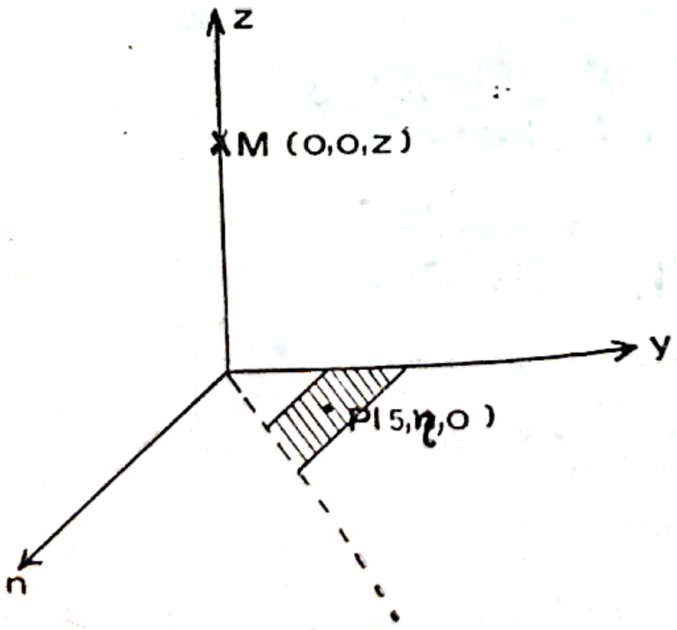


Fig. 2.26

unde

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + z^2}.$$

Deci

$$u(M) = -\mu \iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+z^2}} =$$

$$= -\mu \int_1^{\sqrt{3}} \mathrm{d}\eta \int_0^{\eta} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+z^2}}$$

$$= -\mu \int_1^{\sqrt{3}} \ln \frac{\eta + \sqrt{2\eta^2+z^2}}{\sqrt{\eta^2+z^2}}\, \mathrm{d}\eta.$$

2.27. Potențialul newtonian de volum corespun-

zător unei distribuții continue pe Ω cu densitatea $\mu(P)$, $P \in \Sigma$ ce mărginește Ω, este (fig. 2.27)

$$u(M) = -\iiint_{\Omega} \mu(P) \frac{d\omega_P}{r}, \quad r = MP.$$

Dacă

$$P(\xi, \eta, \zeta), \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (z - \zeta)^2} \text{ și}$$

$$\mu = \text{const.},$$

deci

$$u(M) = -\mu \iiint_{\Omega} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (z-\zeta)^2}}.$$

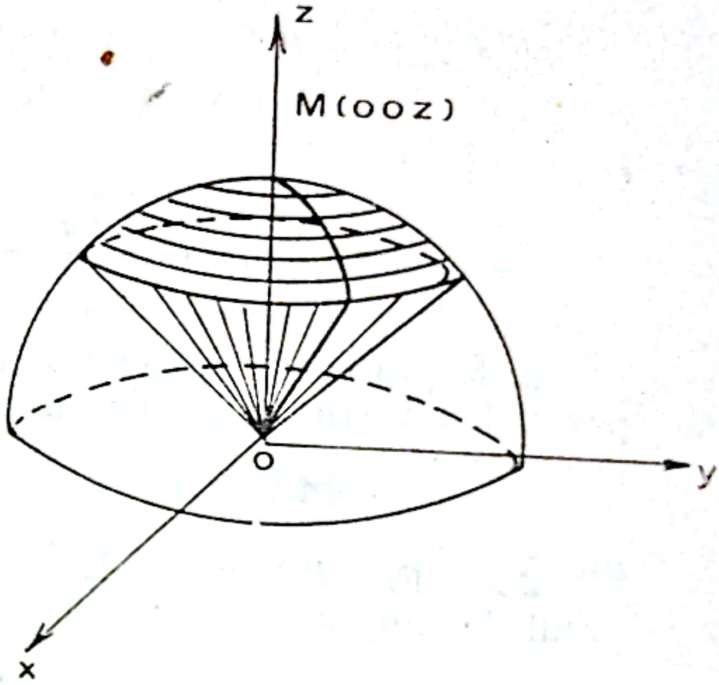


Fig. 2.27

Trecînd la coordonatele sferice $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho \cos\theta$, ecuația conului devine $\rho^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta) = 0$, de unde rezultă $\theta = \frac{\pi}{4}$, , deci

$$u(M) = -\mu \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^R \frac{\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2z\rho\cos\theta + z^2}} =$$

$$= -\frac{2\pi\mu}{z} \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{z\rho \sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\rho^2 - 2z\rho\cos\theta + z^2}} =$$

$$= -\frac{2\pi\mu}{z} \left[\int_0^R \rho \sqrt{\rho^2 - \sqrt{2}z\rho + z^2}\, d\varphi - \frac{R^3}{3} + \frac{R^2}{2} z \right],$$

integrală ce se calculează cu ușurință.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 3

FUNCȚII DE O VARIABILĂ COMPLEXĂ

Fie $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ o funcție de o variabilă complexă $z = x + iy$. Funcția $f(z)$ este *uniformă* dacă unei valori date lui z îi corespunde o singură valoare pentru $f(z)$; în caz contrar se numește *multiformă*.

O funcție $f(z)$ definită uniform într-un domeniu D din planul complex este *monogenă* în punctul $z_0 \in D$ dacă $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ există și este unic determinată.

Condiția necesară ca funcția $f(z)$ definită uniform în domeniul D să fie monogenă în $z_0 \in D$ este ca funcțiile $P(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ și $Q(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ să admită derivate parțiale în (x_0, y_0) și să verifice condițiile Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Dacă funcțiile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ admit derivate parțiale de ordinul întîi continue în (x, y) și sînt verificate condițiile Cauchy-Riemann, $f(z)$ este monogenă în punctul $z = x + iy$.

Numim *serie întreagă* sau *serie de puteri* o serie de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{1}$$

unde z este variabilă complexă, iar a_k sînt constante complexe.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema lui Abel. Orice serie întreagă are un disc de convergenţă cu centrul în origine, raza R a discului depinzînd de coeficienţii seriei. În punctele discului seria este absolut convergentă, iar în punctele exterioare circumferinţei este divergentă. În orice cerc plin $|z| \leqslant r < 2$ seria este uniform convergentă.

Raza de convergenţă a seriei este :

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

Teorema lui Abel. Dacă a_k sînt numere reale pozitive şi raza de convergenţă a seriei este R şi dacă $a_0 \geqslant a_1 R \geqslant a_2 R^2 \geqslant \ldots$ $\ldots \geqslant a_n R^n \geqslant \ldots$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n R^n = 0$, atunci seria (1) este convergentă pe cercul de convergenţă, afară, eventual, de valoarea $z = R$.

Numim *serie Taylor* o serie de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad a_n, z_0 \in C \text{ constant.}$$

O serie de forma

$$\sum_{n=\mu}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad \mu \in Z$$

se numeşte *serie polară*. Dacă $\mu = -\infty$ avem o *serie Laurent*.

O funcţie $f(z)$ definită univoc în fiecare punct al unui domeniu D se numeşte *olomorfă* sau *analitică* în D dacă este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul oricărui punct $z_0 \in D$. Dacă $f(z)$ este reprezentată în vecinătatea oricărui punct $z_0 \in D$ în serie polară ea este *meromorfă*.

Funcţiile olomorfe într-un domeniu D sînt monogene în D şi reciproc.

Dat un arc de curbă rectificabilă (C) şi o funcţie $f(z)$ continuă pe (C) avem

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)dy + i\int_C Q(x, y)\,dx + P(x, y)\,dy.$$

Teorema lui Cauchy. Integrala unei funcţii monogene într-un domeniu simplu conex D, de-a lungul unei curbe simple, rectificabile, închise (C) situată în întregime în D este nulă.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema lui Morera. Dacă integrala unei funcţii uniformă şi continuă într-un domeniu D este nulă de-a lungul unei curbe simple închise rectificabile oarecare din acel domeniu, funcţia este monogenă în domeniu.

Dacă $f(z)$ este monogenă în domeniu simplu conex D şi (C) este o curbă simplă închisă, rectificabilă conţinută în D, care mărgineşte un domeniu Δ, pentru orice $z_0 \in \Delta$ avem

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz, \quad \text{(Formula integrală a lui Cauchy)}$$

şi

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^n}\,dz.$$

Fie $f(z)$ o funcţie care are punctul $z = z_0$ punct singular izolat (pol sau punct singular esenţial). Există o coroană circulară cu centrul în z_0 în care $f(z)$ este olomorfă şi avem dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

z fiind un punct din coroana circulară, şi

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(u - z_0)^{k+1}}\,du.$$

Numărul

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_C f(z)\,dz$$

se numeşte *reziduul funcţiei* $f(z)$ în *punctul* z_0 şi se notează $\operatorname{Rez}_{z=z_0} f(z)$ (sau R_{z_0}). Avem

$$\operatorname{Rez}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)\,dz,$$

unde C^- este un cerc cu centrul în origine considerat în sens invers. Ţinînd seama de formula integrală a lui Cauchy în cazul în care z_0 este un pol multiplu de ordin p avem

$$\operatorname{Rez}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z - z_0)^p f(z)]^{(p-1)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Teorema reziduurilor. Dacă f este o funcție uniformă și are în interiorul domeniului mărginit de curba simplă, închisă, rectificabilă (C) un număr finit de puncte singulare izolate $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ atunci

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Rez}_{z=\alpha_k} f(z).$$

Dacă AB este un arc pe cercul $|z|=R$ așa încît $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$ și dacă $\lim\limits_{|z|\to\infty} z f(z) = k$ (k, = const.)., atunci

$$\lim_{R\to\infty} \int_{AB} f(z)\,dz = ik(\beta - \alpha).$$

Dacă AB este un arc pe cercul $|z-a| = R$ așa încît

$$\alpha \leqslant \arg(z-a) \leqslant \beta \text{ și } \lim_{z\to 0} (z-a) f(z) = k, \ (k = \text{const.}),$$

atunci

$$\lim_{R\to 0} \int_{AB} f(z)\,dz = ik(\beta - \alpha).$$

Un domeniu D *este reprezentat conform pe un domeniu* Δ *dacă transformarea domeniului* D *în* Δ *este biunivocă, continuă și cu inversa continuă și dacă, oricare ar fi curbele* C_1, C_2 *din* D *și corespunzătoarele lor* Γ_1, Γ_2 *din* Δ, *unghiul sub care se taie* Γ_1 *și* Γ_2 *este egal cu unghiul sub care se taie* C_1 *și* C_2. Transformarea liniară sau omografică este de forma:

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad (ad - bc \neq 0),\ a, b, c, d = \text{const. complexe.}$$

Transformarea care reprezintă conform semiplanul superior din planul (z) pe interiorul unui poligon cu n laturi de unghiuri πa_k din planul (w) este dată de formula lui Schwartz-Christoffel

$$w = \alpha \int_{z_0}^{z} (z - z_1)^{a_1 - 1}(z - z_2)^{a_2 - 2} \ldots (z - z_n)^{a_n - 1}\,dz,$$

unde

$$0 \leqslant a_i \leqslant 2, \ \sum_{i=1}^{n} a_i = n - 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.1. Puneți sub altă formă numerele complexe :

$$z_1 = \sin(1+i)\,;\ z_2 = i^i\,;\ z_3 = \operatorname{tg}\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{3}\right);\ z_4 = \operatorname{sh}(1+i).$$

3.2. Precizați regiunea din plan indicată de relațiile :

1. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1$.
2. $|z-1| + |z+1| = 3$.
3. $|z-1| - |z+1| > 3$.
4. $|z| < \arg z,\ 0 < \arg z < 2\pi$.

3.3. Demonstrați egalitățile :

1. $i \ln i(z + \sqrt{z^2-1}) = -\operatorname{arc\,sin} z$.
2. $i \ln(z + \sqrt{z^2-1}) = -\operatorname{arc\,cos} z$.
3. $\ln(z + \sqrt{z^2-1}) = \operatorname{arc\,ch} z$.

3.4. Să se rezolve ecuațiile :

1. $\sin z + \cos z = i$.
2. $\sin z + i \operatorname{sh} z = 0$.
3. $\operatorname{ctg} z = 1 + i$.
4. $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1 + i$.

3.5. Să se determine punctele în care funcțiile de mai jos sînt monogene și să se calculeze derivatele în punctele determinate :

1. $f(z) = z^2 + 2z\bar{z} - 2\bar{z}^2 + 3z + 2\bar{z}$.
2. $f(z) = x^2 - 4xy + y + i(3x - y^2)$.

3.6. Să se determine constantele a, b, c, d așa încît următoarele funcții să fie monogene :

1. $f(z) = \operatorname{ch} x(\cos y + a \sin y) + \mathrm{i}\, \operatorname{sh} x(\cos y + b \sin y)$.
2. $f(z) = e^x \cos y + ax + i(e^x \sin y + by + cx)$.

Scanned with OKEN Scanner

3.7. Să se verifice că partea reală și partea imaginară ale unei funcții raționale satisfac condițiile Cauchy-Riemann.

3.8. Să se determine funcțiile monogene $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ definite prin condițiile:

1. $P(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$; $f(0) = 0$.

2. $Q(x, y) = e^x \sin y + \dfrac{y}{x^2 + y^2}$; $f(1) = 1$.

3. $P(x, y) = \varphi(ax + by)$, $(a, b = \text{const.})$, $f(0) = 0$.

4. $P(x, y) - Q(x, y) = \dfrac{x - y}{2} \ln (x^2 + y^2) - (x + y) \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$.

3.9.1. Fiind date ecuațiile diferențiale de primul ordin

$$(E_1): \mathrm{d}y - f(x, y)\mathrm{d}x = 0, \quad (E_2): \mathrm{d}x + f(x, y)\mathrm{d}y = 0$$

se cere la ce condiții trebuie să satisfacă funcția $f(x, y)$ pentru ca primii membri ai celor două ecuații (E_1), (E_2) să admită un factor integrant comun $\mu(x, y)$?

2. Dacă această condiție este satisfăcută, există o funcție analitică $F(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ de variabilă complexă $z = x + iy$ astfel ca cele două ecuații $P(x, y) = C$, $Q(x, y) = C_1$ să reprezinte integralele generale ale ecuațiilor (E_1) și (E_2).

3. Există de asemenea o funcție $F_1(x)$ a cărei parte reală este arc g $[f(x, y)]$. Care este relația între aceste două funcții analitice?

4. Să se determine cele două funcții $F(z)$ și $F_1(z)$ știind că $f(x, y)$ nu depinde decît de suma $x + y$ și satisfăcînd condițiile $f = 0$, $f'_x = 0$, pentru $x = y = 0$.

(Th. Angheluță [2])

3.10. Să se studieze funcțiile multiforme:

1. $f_1(z) = \sqrt{z^3 + 1}$, $\quad f_2(z) = \sqrt[3]{z^3 + 1}$.

2. $f(z) = \ln \dfrac{z - i}{z + i}$.

3. $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} \ln (z^2 + 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

3.11. Să se studieze convergența seriilor următoare :

1. $z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{(1+nz)\,[1+(n-1)z]}, \quad |z| < 1.$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$

3.12. Să se determine cercul de convergență pentru următoarele serii :

1. $\sum_{n \geqslant 0} a^{n^2} z^n, \quad (|a| < 1).$

2. $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\cos in}{2^n} z^n.$

3. $\sum_{n \geqslant 1} \frac{e^{in}}{n^2} z^n.$

4. $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(z+3i)^n}{n 2^n}.$

5. $\sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{1-3in}{n+2i}\right)^n z^n.$

6. $\sum_{n \geqslant 1} \frac{n^n}{n!} z^n.$

3.13. Se consideră funcția :

$$f(z) = \frac{z(z^2+1) - 4(z^2-1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}.$$

Să se dezvolte în serie în jurul punctelor $z = 01$, $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$.

3.14. Se consideră funcția :

$$f(z) = \sqrt{2 - z^2} + \sqrt[3]{3 - z^2},$$

unde pentru cei doi radicali se consideră ramurile care în origine iau valorile $\sqrt{2}$, respectiv $\sqrt[3]{3}$.

Să se dezvolte funcția dată în serie de puteri ale lui z în domeniile :

1. $|z| < \sqrt{2}$, 2. $\sqrt{2} < |z| < \sqrt[3]{3}$; 3. $|z| > \sqrt[3]{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

3.15. Să se dezvolte în serie întreagă funcțiile :

1. $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$;

2. $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$.

3.16. Să se dezvolte în serie în jurul punctului $z = 1$ funcția :

$$f(z) = \sin \frac{z-2}{z-1}.$$

3.17. Se consideră funcția

$$f(z) = \ln \frac{1-z}{1+z},$$

unde pentru logaritm se consideră determinarea care se anulează în origine. Să se dezvolte $f(z)$ în serie de puteri ale lui z în domeniile :

$$1.\ |z| < 1;\ 2.\ |z| > 1.$$

3.18. Să se dezvolte în serie funcția

$$f(z) = \frac{1}{z \sin z}$$

în jurul punctelor $z = 0$ și $z = \pi$.

3.19. Să se calculeze

$$\int_\Gamma \frac{dz}{|z+\bar{z}| + |z-\bar{z}|},$$

unde Γ este conturul pătratului cu vîrfurile $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$ și $D(0, -1)$.

3.20. Să se calculeze

$$\int_\sigma \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

1. pe semicercul $(C) : |z| = 1,\ y \geqslant 0$ pentru radical considerînd ramura care în punctul $z = 1$ ia valoarea 1.

2. pe semicercul $(C): |z| = 1,\ y \leqslant 0$ pentru aceeași ramură.

3.21. Să se calculeze

$$\int_C \frac{1}{z^2-2} \ln \frac{z+1}{z-1}\, dz,$$

unde :

1. $(C): |z| = \frac{1}{2}$.

2. $(C): |z| = 3$.

Pentru logaritm se consideră determinarea care în origine are valoarea πi.

3.22. Să se calculeze integrala

$$\int_C \frac{dz}{(z^2-1)\sqrt{z^2+1}};$$

unde curba (C) este parabola $y^2 = x$, iar pentru radical se consideră determinarea care ia valoarea unu pentru $z = 0$.

3.23. Să se calculeze integrala

$$\int_C z^n e^{\frac{z}{z}}\, dz,$$

unde (C) este cercul $|z| = r$, $n \in Z$. [41].

3.24. Să se calculeze integralele

1. $\int_{|z|=a} \frac{ze^z}{(z-1)^2}\, dz.$

2. $\int_{|z|=4} \frac{z}{\sin z - (1-\cos z)}\, dz.$

3. $\int_{|z|=a} \frac{e^{\lambda z + \frac{z^2}{2}}}{z^{n+1}}\, dz,\ a > 0,\ n = \text{intreg}.$

3.25. Să se calculeze integralele :

1. $I = \int_0^\infty \sin x^\alpha\, dx;\quad I_1 = \int_0^\infty \cos x^\alpha dx,\ (|\alpha| < 1).$

2. $\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x^2+a^2)}\, dx,\ (a > 0).$

Scanned with OKEN Scanner

3. $I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$; $I_1 = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-x}\,dx$, $(0 < \alpha < 1)$.

4. $\int_0^\infty \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \cdot \frac{\sin x}{x}\,dx$.

5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)(x-1)}\,dx$.

6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx$.

7. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + a}$, $a > 1$.

8. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2x}{1 - 2a\cos x + a^2}\,dx$, $|a| < 1$.

9. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x\,dx$.

10. $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x(1-x)}}{(1+x)^2}\,dx$.

11. $\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha}{1+x}\,dx$, $(-1 < \alpha < 2.)$

12. $\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{tx}}{x^2+1}\,dx$, $t > 0$.

13. $\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^{x+2}}{x(x+1)(x+2)}\,dx$, $c > 0$, $a > 1$.

3.26. Să se demonstreze pe egalitatea :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{ax}\sqrt{x}}{x^2+\omega^2}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sqrt{x}}{x^2+\omega^2} = \frac{1}{\omega}\sin\left(a\omega + \frac{\pi}{4}\right);$$

3.27. Să se determine funcţia omografică $w = \frac{az+b}{cz+d}$ care transformă punctele 1, 0, $-i$ în punctele 0, -1, $-\frac{1+i}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

3.28. Să se determine transformarea conformă care transformă $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z < \pi$, în semiplanul $\operatorname{Im} w \geqslant 0$ așa încît punctele $-1, 0, 1$ se transformă în $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$.

3.29. Să se studieze transformarea $2w = z + az^{-1}$, $a > 0$.

1. Ce devin curbele $|z| = k$, ($k = \text{const.}$) și arc $z = k$ prin această transformare?

2. În ce se transformă domeniile

a) $\frac{1}{R} < |z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z > 0$.

b) unghiul $\frac{\pi}{2} - \varphi < \arg z < \frac{\pi}{2} + \varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

3.30. Să se determine funcția care transformă conform planul (z) cu tăietură după segmentul care unește punctele $z_1 = -1$, $z_2 = i$, în semiplanul superior.

3.31. Să se determine funcția $w(z)$ care realizează reprezentarea conformă a semibandei $-1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ cu tăietura după segmentul ce unește punctele $z_1 = 0$, $z_2 = i$, în $\operatorname{Im} w > 0$.

3.32. Să se determine funcția $w(z)$ care realizează reprezentarea conformă a domeniului din figura (3.32), în $(w) < 1$.

3.33. Să se determine funcția $w(z)$ care reprezintă conform pe semiplanul $\operatorname{Im} z > 0$ poligonul din figurile 3.33.1.; 3.33.2; 3.33.3 și 3.33.4.

SOLUȚII

3.1. Avem

$$z_1 = \sin 1^\circ \cos i + \cos 1^\circ \sin i,$$

dar

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

deci

$$\sin i = \frac{i(e^2-1)}{2e}, \quad \cos i = \frac{e^2+1}{2e}$$

și

$$z_1 = \frac{1}{2e}[(e^2+1)\sin 1^\circ + i(e^2-1)\cos 1^\circ].$$

Pentru z_2 scriem

$$\ln z_2 = i \ln i = i \ln e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = -\pi\left(2k+\frac{1}{2}\right)$$

deci

$$z_2 = e^{-\pi\left(2k+\frac{1}{2}\right)}.$$

Analog găsim :

$$z_3 = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i\left(\ln 3+\frac{\pi i}{3}\right)}-e^{-i\left(\ln 3+\frac{\pi i}{3}\right)}}{e^{i\left(\ln 3+\frac{\pi i}{3}\right)}+e^{-i\left(\ln 3+\frac{\pi i}{3}\right)}} = \frac{3^{2i}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi}{3}-\mathrm{sh}\frac{\pi}{3}\right)^2+1}{3^{2i}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi}{3}-\mathrm{sh}\frac{\pi}{3}\right)^2-1}$$

și

$$z_4 = \frac{e^{1+i}-e^{-1-i}}{2} = \frac{e(\cos 1^\circ+i\sin 1^\circ)-\frac{1}{e}(\cos 1^\circ - i\sin 1^\circ)}{2} =$$

$$= \frac{(e^2-1)\cos 1^\circ + i(e^2+1)\sin 1^\circ}{2e}.$$

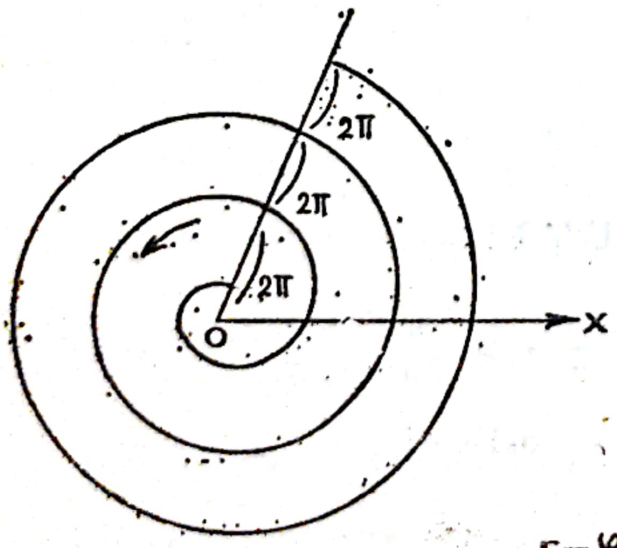


Fig. 3.2

3.2.1. Semiplanul mărginit de dreapta $x + y = 1$ care nu conține originea.

2. elipsa $\frac{x^2}{2}+\frac{4y^2}{5}-1=0.$

3. exteriorul elipsei

$$\frac{4x^2}{9}+\frac{4y^2}{5}-1=0.$$

4. interiorul domeniului mărginit de segmentul $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ și un tur a spiralei lui Arhimede $r = \varphi$. (fig. 3.2.).

$r=\varphi$

3.3.1. Notăm $z = \sin u$, iar la **2.** $z = \cos u$ și calculînd logaritmii egalitățile sînt imediate.

3. Notăm $z = \operatorname{ch} u$ și $\ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) = \ln(\operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u) = \ln e^u = u$, și egalitatea este evidentă.

3.4.1. Înlocuind $\sin z$ și $\cos z$ cu valoarea lor în funcție de e^{iz} obținem ecuația

$$(1 + i)e^{2iz} + 2e^{iz} + (i - 1) = 0,$$

cu soluțiile

$$e^{iz} = \frac{(1 - i)(-1 \pm \sqrt{3})}{2},$$

de unde rezultă

$$z = -\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \mp i \ln \sqrt{2 - \sqrt{3}}, \quad k \in Z.$$

2. Avem $\sin iz = -i \operatorname{sh} z$, iar ecuația se scrie

$$\sin z + \sin iz = 0 \text{ sau } 2\sin \frac{z(1 + i)}{2} \cos \frac{z(1 - i)}{2} = 0,$$

cu soluțiile

$$z = k\pi(1 - i) \text{ și } z = \frac{(2k + 1)\pi}{2}(1 + i), \quad k \in Z.$$

3. $\operatorname{ctg} z = i \dfrac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}$, iar ecuația devine

$$e^{2iz} = 1 + 2i,$$

de unde rezultă

$$z = -\frac{i}{2} \ln(1 + 2i) = \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} 2 + k\pi) - \frac{i}{2} \ln \sqrt{5}.$$

4. Ecuația devine după înlocuirea lui $\operatorname{sh} z$ și $\operatorname{ch} z$ în funcție de e^z:

$$e^{-z} = 1 + i,$$

cu soluția

$$z = -\ln \sqrt{2} - i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in Z.$$

3.5.1. Funcția se scrie

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 5x + i(6xy + y).$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţiile Cauchy-Riemann se scriu :

$$2x + 5 = 6x + 1$$

$$6y = -6y,$$

de unde rezultă $x = 1$, $y = 0$. Deci funcţia dată este monogenă numai în punctul $z = 1$.
Scriem

$$\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) = 2(z + \bar{z} + 1)\,\Delta z +$$

$$+ (2z - 4\bar{z} + 3)\,\overline{\Delta z} + (\Delta z)^2 + 2\Delta z\overline{\Delta z} - 2(\overline{\Delta z})^2.$$

În punctul $z = 1$, $\bar{z} = 1$, iar această expresie are valoarea

$$\Delta f|_{z=1} = 6\Delta z + \overline{\Delta z} + (\Delta z)^2 + 2\Delta z\,\overline{\Delta z} - 2(\overline{\Delta z})^2$$

şi

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = 6 + \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \Delta z + 2\overline{\Delta z} - 2\frac{(\overline{\Delta z})^2}{\Delta z}.$$

Dacă $\Delta z \to 0$, $\overline{\Delta z} \to 0$ şi $\left|\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right| = \frac{|\overline{\Delta z}|}{|\Delta z|} = 1$, $\frac{(\Delta\bar{z})^2}{\Delta z} = |\Delta z|$.
Trecînd la limită avem

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = 7,$$

adică

$$f'(z)|_{z=1} = 7.$$

2. Ecuaţiile Cauchy-Riemann se scriu

$$2x - 4y = -2y$$

$$-4x + 1 = -3,$$

de unde rezultă că funcţia dată este monogenă în punctul $z_0 = 1 + i$. În acest punct avem

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x_0} + i\frac{\partial Q}{\partial x_0} = -2 + 3i$$

3.6.1. Din ecuaţiile Cauchy-Riemann rezultă

$$\cos y + a \sin y = -\sin y + b \cos y$$

$$-\sin y + a \cos y = -\cos y - b \sin y$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$a = -1$, $b = 1$, iar funcția se scrie

$f(z) = \mathrm{ch}x\,(\cos y - \sin y) + i\,\mathrm{sh}\,x\,(\cos y + \sin y)$.

2. Din ecuațiile

$$e^x \cos y + a = e^x \cos y + b$$

$$-e^x \sin y = -e^x \sin y + c,$$

rezultă $a = b$ și $c = 0$, deci funcția monogenă este

$$f(z) = e^z + az, \quad (\forall)\ a \text{ complex.}$$

3.7. Vom stabili mai întîi condițiile Cauchy-Riemann în coordonate polare. Fie funcția monogenă

$$f(z) = \alpha(r, \theta) + i\beta\,(r, \theta),\ z = re^{i\theta}.$$

Luînd $\Delta z = \Delta r e^{i\theta}$ și apoi $\Delta z = r\,\Delta\theta e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} = ie\Delta\theta e^{i\theta}$

avem $f'(z) = \dfrac{1}{e^{i\theta}}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial r} + i\dfrac{\partial\beta}{\partial r}\right) = \dfrac{1}{re^{i\theta}}\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial\theta} - i\dfrac{\partial\alpha}{\partial\theta}\right)$,

de unde rezultă

$$\frac{\partial\alpha}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\beta}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} = -r\frac{\partial\beta}{\partial r}.$$

Din acestea obținem ecuația lui Laplace în coordonate polare:

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial\theta^2} + r^2\frac{\partial^2\beta}{\partial r^2} + r\frac{\partial\beta}{\partial r} = 0.$$

Revenind la problema noastră este suficient să facem verificarea pentru funcția

$$f(z) = z^n = r^n\,(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

3.8.1. Funcția $P(x, y)$ este armonică ($\Delta P = 0$).
Avem

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} = e^x\,(\sin y + y\cos y);$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = e^x\,(x+1)\cos y - e^x\,y\sin y,$$

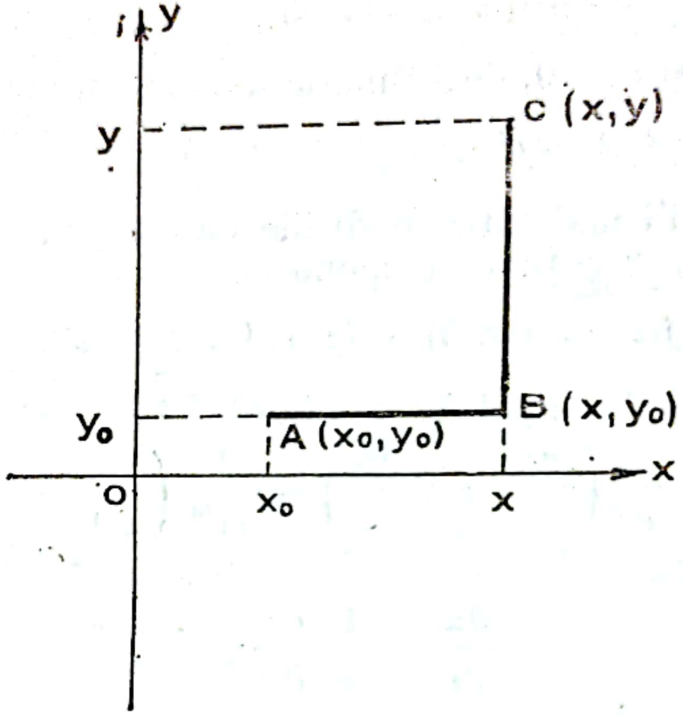
Scanned with OKEN Scanner

deci

$$dQ = e^x (\sin y + y \cos y)\, dx + e^x [(x+1)\cos y - y - y \sin y]\, dy,$$

de unde rezultă integrînd pe drumul din fig. 3.8.

$$Q(x, y) = e^x (x \sin y + y \cos y) + C,$$



Fig, 3.8

deci

$$f(z) = ze^z + iC, \quad C = \text{const.}$$

Din condiţia $f(0) = 0$ rezultă $C = 0$, deci $f(z) = ze^z$.

2. $\dfrac{\partial P}{\partial x} = e^x \cos y + \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$; $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y + \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$,

iar

$$dP = \left[e^x \cos y + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] dx + \left[-e^x \sin y + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right] dy.$$

Integrînd ca mai sus rezultă

$$P(x, y) = e^x \cos y - \frac{x}{x^2 + y^2} + C, \; C = \text{const.}$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$f(z) = e^z - \frac{1}{z} + C.$$

Din $f(1) = 1$ rezultă $C = 2 - e$, deci

$$f(z) = e^z - \frac{1}{z} + 2 - e.$$

3. Cu notația $u = ax + by$ avem :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = a^2 \varphi''(u), \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = b^2 \varphi''(u).$$

Vom determina mai întîi toate funcțiile $\varphi(u)$ care verifică ecuația lui Laplace

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0,$$

sau în cazul dat $(a^2 + b^2)\varphi''(u) = 0$, deci $\varphi''(u) = 0$, de unde rezultă $\varphi(u) = C_1 u + C$, $(C_1, C = \text{const.})$

$$P(x, y) = \alpha x + \beta y + C, \quad (\alpha, \beta = \text{const.}).$$

Vom determina acum pe $f(z)$ fără nici o cuadratură.

Din $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ și $\overline{f(z)} = P(x, y) - iQ(x, y)$ rezultă

$$2P(x, y) = f(z) + \overline{f(z)}. \tag{2}$$

Deci membrul al doilea al egalității (1) se descompune într-o sumă de două funcții ; una de z și alta de $\bar{z}$. Vom găsi funcția de z înlocuind în $P(x, y)$ pe x și y în funcție de z și $\bar{z}$:

$$2P\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = 2\alpha \frac{z + \bar{z}}{2} + 2\beta \frac{z - \bar{z}}{2i} + C =$$

$$= (\alpha - i\beta)z + (\alpha + i\beta)\bar{z} + C,$$

deci

$$f(z) = (\alpha - i\beta)z + C.$$

Din $f(0) = 0$ rezultă $C = 0$, deci $f(z) = (\alpha - i\beta)z$.

4. Avem

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2) - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2) - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+1\,;\quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \qquad (1)$$

și

$$P = \int \frac{\partial P}{\partial y}\,dy + \varphi(x) = \frac{x}{2}\ln(x^2+y^2) - y\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \varphi(x).$$

Derivînd în raport cu x

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+1+\varphi'(x)$$

și egalînd cu (1) obținem $\varphi'(x)=0$, deci $\varphi = \text{const.}$ și

$$f(z) = \frac{x}{2}\ln(x^2+y^2) - y\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} +$$

$$+ i\left[x\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \frac{y}{2}\ln(x^2+y^2)\right] + C.$$

3.9.1. Dacă $\mu(x, y)$ este factorul integrant, expresiile $\mu(dy - f dx)$ și $\mu(dx + f\,dy)$ sînt diferențiale totale exacte și condițiile de integrabilitate sînt

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mu}{\partial x} + f\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu q = 0 \\ &\frac{\partial \mu}{\partial y} - f\frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu p = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

unde s-a notat $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Din (1) deducem

$$(1+f^2)\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu(q+fp) = 0$$

$$(1+f^2)\frac{\partial \mu}{\partial y} - \mu(p-fq) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiția

$$\frac{\partial^2 \ln \mu}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \ln \mu}{\partial y\, \partial x},$$

conduce la relația :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p - fq}{1 + f^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q + fp}{1 + f^2}\right) = 0. \qquad (2)$$

2. Funcția $F(z)$ fiind analitică, P și Q verifică condițiile Cauchy-Riemann. Ecuațiile diferențiale care au pe $P(x, y) = C$, $Q(x, y) = C_1$ ca integrale generale sînt

$$\frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy = 0,$$

sau ținînd seama de condițiile Cauchy-Rieman

$$\frac{\partial P}{\partial x}\,dx - \frac{\partial Q}{\partial x}\,dy = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial x}\,dy = 0,$$

sau

$$\mu f\,dx - \mu\,dy = 0,\ \mu\,dx + \mu f\,dy = 0.$$

Cum

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \mu f, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} = \mu,$$

avem

$$P(x, y) = \int \mu(f dx - dy); \quad Q(x, y) = \int \mu(dx + f dy)$$

și

$$F(z) = \int \mu(f + i)\,(dx + i\,dy).$$

3. Condiția necesară și suficientă a existenței funcției $F_1(z) = P_1(x, y) + iQ_1(x, y)$ este ca $P_1(x, y) = \operatorname{arc\,tg} f$ să fie armonică.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = \frac{r}{1+f^2} - \frac{2fp^2}{(1+f^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} = \frac{t}{1+f^2} - \frac{2fq^2}{(1+f^2)^2},$$

unde

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Ecuația $\Delta P_1 = 0$ se scrie sub forma

$$(r+t)(1+f^2) = 2f(p^2+q^2),$$

care este de fapt (2). Ținînd seama de expresia lui $F(z)$ avem

$$F'(z) = \mu(f+i),$$

sau

$$iF'(z) = \mu(-1+if).$$

Punînd $f = \operatorname{tg}\theta$, rezultă

$$iF'(z) = \sqrt{\mu(1+f^2)}\,(\cos\theta + i\sin\theta),$$

iar

$$\ln[iF'(z)] = \ln\rho - i\theta, \text{ cu } \rho = \sqrt{\mu(1+f^2)}.$$

Funcția $i\ln[iF'(z)] = \theta - i\ln\rho$ este analitică datorită lui $F(z)$ și partea ei reală este tocmai $\operatorname{arctg} f$. Deci

$$F_1(z) = i\ln[iF'(z)],$$

de unde deducem relația dintre cele două funcții

$$F(z) = -i\int e^{-iF_1(z)}\,dz. \tag{3}$$

4. Fie $f(x,y) = \varphi(x+y)$. Înlocuind în (2) obținem ecuația

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{2\varphi\varphi'}{1+\varphi^2},$$

cu soluția generală

$$\varphi = \operatorname{tg} Cu + C_1, \; C, C_1 = \text{const.}, \; u = x+y.$$

Condițiile inițiale $\varphi = 0$, $\varphi' = 1$ pentru $u = 0$ ne dau $C_1 = 0$, $C = 1$, deci $f(x,y) = \operatorname{tg}(x+y)$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă $F_1 = x + y + iQ_1$ cu $\frac{\partial Q_1}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial Q_1}{\partial y} = 1$, deci $Q_1 = y - x$ și $F_1(z) = (1 - i)\, z$.

Din (3) deducem

$$F(z) = -i \int e^{-iF_1(z)}\, dz = \frac{1+i}{2} e^{-(1+i)z}$$

3.10.1. Notăm $z + 1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \rho_2 e^{i\theta_2}$,

$$z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \rho_3 e^{i\theta_3}.$$

Funcția $f_1(z)$ se scrie

$$f_1(z) = (\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{\frac{1}{2}} e^{k\pi i + \frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)}.$$

Ținînd seama de reprezentarea geometrică a adunării și scăderii numerelor complexe, rezultă că ρ_1 este segmentul care unește punctul -1 cu z, iar θ_1 unghiul dintre axa reală și acest segment — în sens direct —, analog pentru ρ_2, ρ_3, θ_2, θ_3 (fig. 3.10.1.).

Cele două ramuri ale funcției sînt :

$$f_{11}(z) = (\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)}$$

$$f_{12}(z) = (\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 2\pi)}$$

Dacă punctul z descrie un arc de curbă zMz_1, fig. 3.10.1, fără a înconjura nici unul din punctele -1, $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, funcția $f_1(z)$ ia valoarea

$$f_1'(z) = (\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 2k\pi)}.$$

Dacă z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1, zNz_1 înconjurînd unul sau

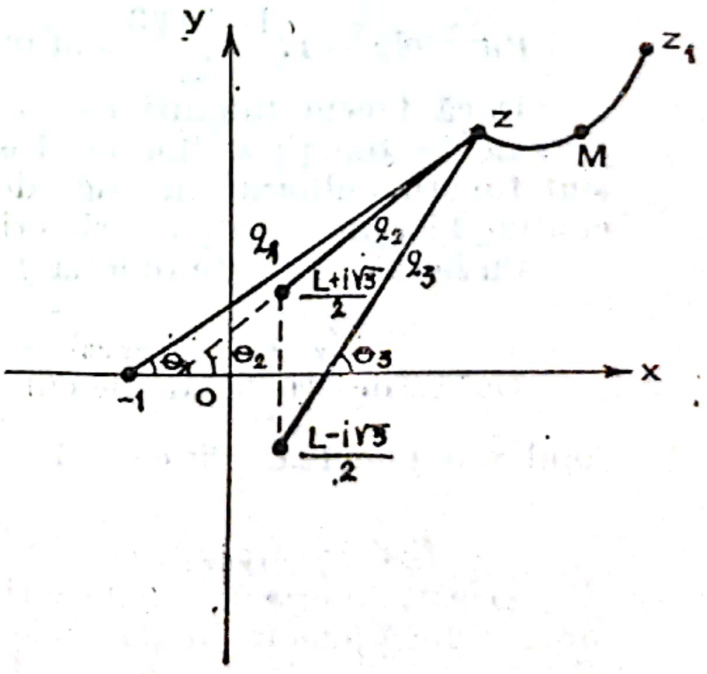


Fig. 3.10.1

toate trei din punctele -1, $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, (fig. 31.0.2), funcția $f_1(z)$ ia valoarea

$$f_1''(z) = (\rho_1\rho_2\rho_3)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3+2\pi+2k\pi)} = -f_1'(z).$$

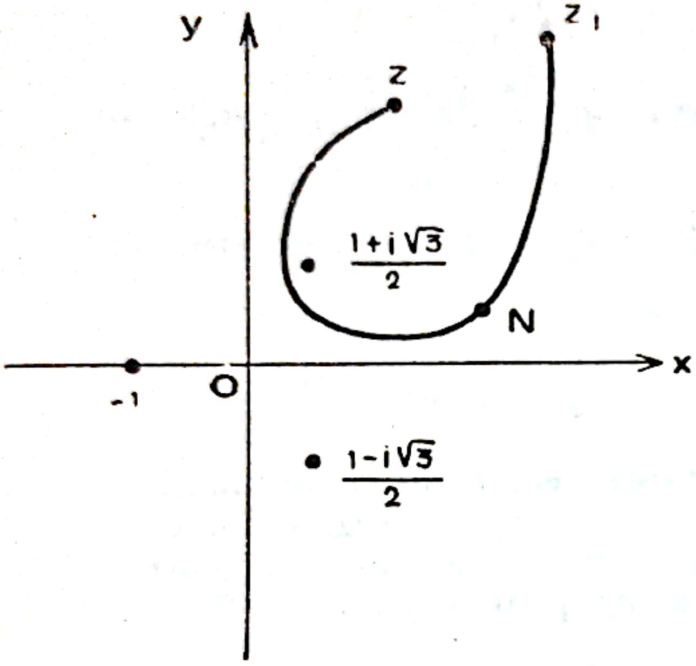


Fig. 3.10.2

Dacă z descrie un arc de curbă care unește z cu z_1 înconjurînd două din punctele -1, $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, funcția $f_1(z)$ ia valoarea $f_1'(z)$.

Deci, cînd punctul z descrie o curbă care înconjoară un număr impar din punctele -1, $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, funcția $f_1(z)$ trece de la o determinare la alta, iar cînd curba înconjară un număr par de puncte valoarea funcției un se schimbă.

Punctele -1, $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ sînt punctele critice ale funcției $f_1(z)$.

Dacă facem tăieturi ca în fig. 3.10.3, ramurile funcției $f_1(z)$ devin funcții uniforme. De asemenea, ramurile funcției sînt funcții uniforme în orice domeniu simplu conex care nu conține nici unul din punctele critice.

Cu notațiile făcute funcția $f_2(z)$ se scrie

$$f_2(z) = (\rho_1\rho_2\rho_3)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2k\pi i}{3} + \frac{i}{3}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}.$$

Dacă z descrie un arc de curbă ce unește z cu z_1 înconjurînd unul din punctele critice -1, $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, funcția ia valoarea

$$f_2'(z) = (\rho_1\rho_2\rho_3)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2k\pi i}{3} + \frac{i}{3}(\theta_1+\theta_2+\theta_3+4\pi)} = e^{\frac{2\pi i}{3}} f_2(z).$$

Dacă z descrie un arc de curbă ce unește z cu z_1 înconjurînd oricare două puncte din punctele critice, funcția $f_2(z)$ ia valoarea

$$f_2''(z) = (\rho_1\rho_2\rho_3)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2k\pi i}{3} + \frac{i}{3}(\theta_1+\theta_2+\theta_3+4\pi)} = e^{\frac{4\pi i}{3}} f_2(z).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă z descrie un arc de curbă ce înconjoară toate punctele critice funcţia $f_2(z)$ ia valoarea

$$f_2'''(z) = (\rho_1\rho_2\rho_3)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2k\pi i}{3} + \frac{i}{3}(\theta_1+\theta_2+\theta_3+6\pi)} = f_2(z).$$

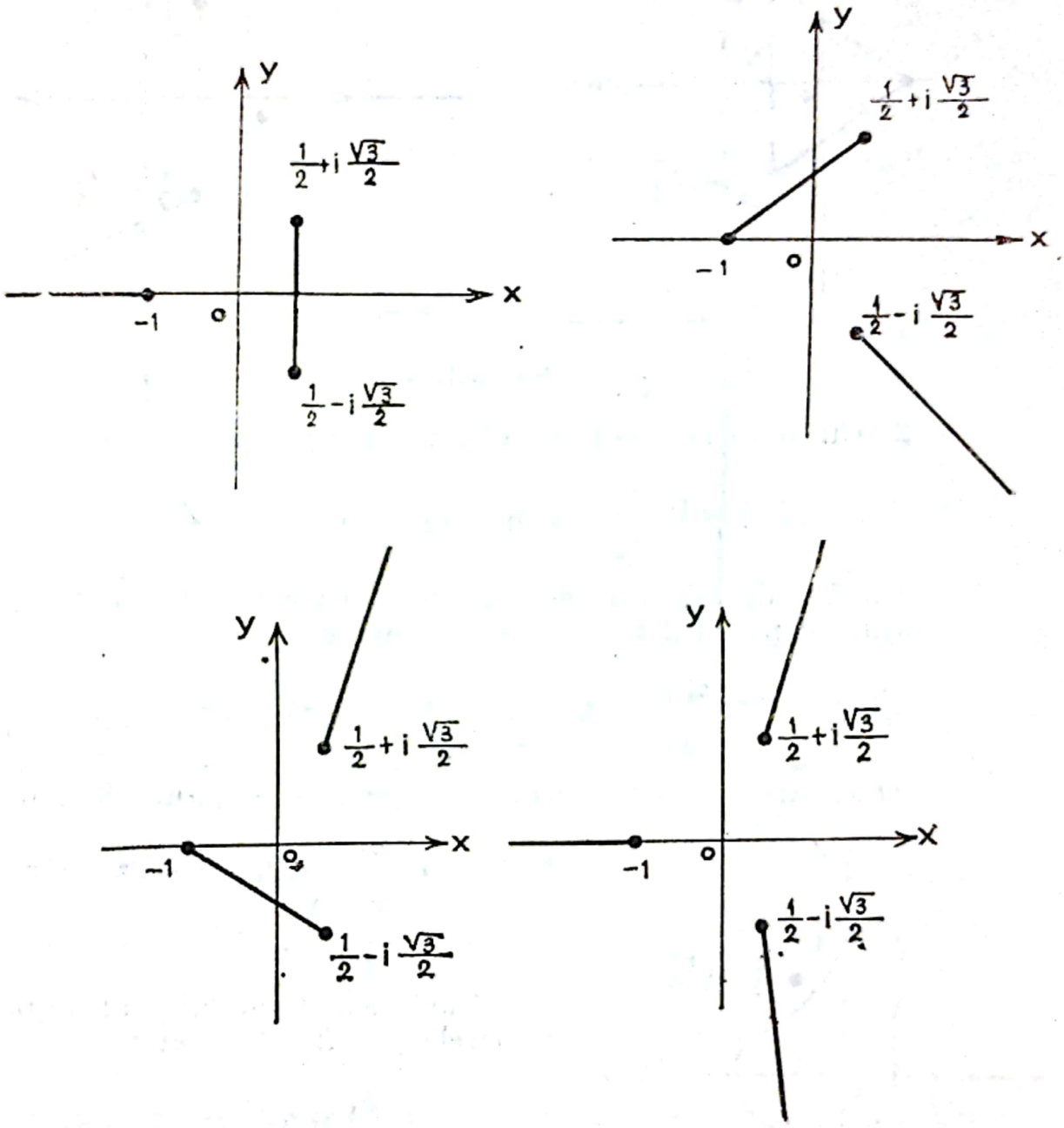
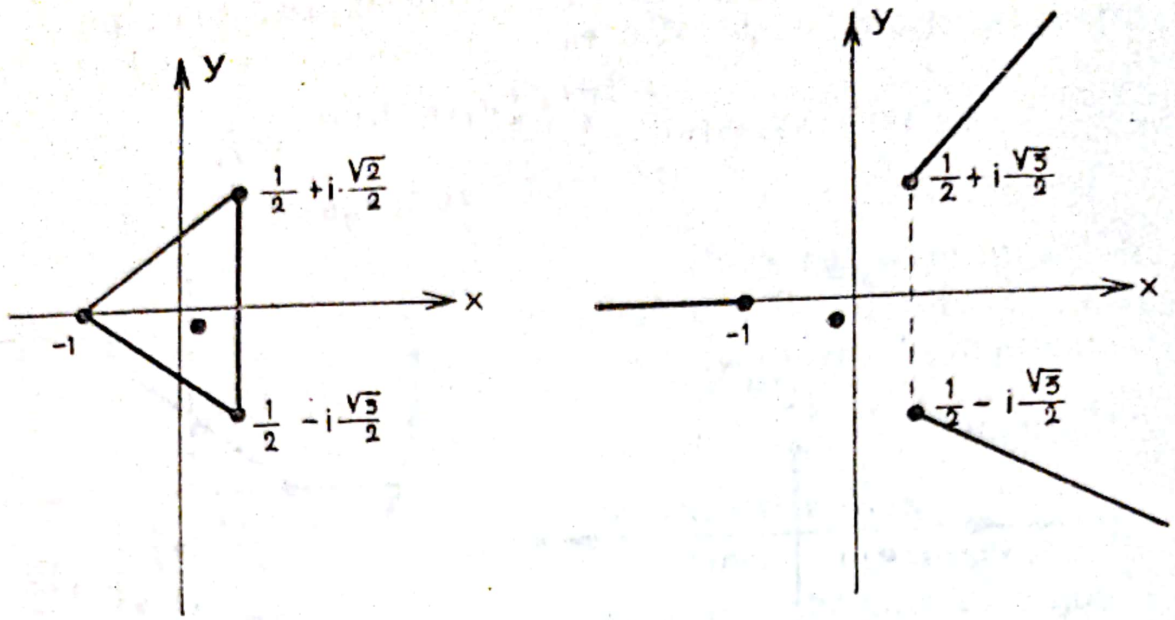


Fig. 3.10.3

Dacă facem o tăietură în plan ca în fig. 3.10.4, ramurile funcţiei devin uniforme. Ramurile funcţiei $f_2(z)$ sînt uniforme în orice domeniu simplu conex care nu conţine nici unul din punctele critice, fig. 3.10.5.

Scanned with OKEN Scanner



Fig, 3.10.4

2. Cu notația $z-i=\rho_1 e^{i\theta_1}$, $z+i=\rho_2 e^{i\theta_2}$, funcția se scrie

$$f(z)=\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}+i(\theta_1-\theta_2+2k\pi),\quad k\in Z.$$

Dacă z descrie un cerc de curbă care unește pe z cu z_1 înconjurînd punctul $z=i$, funcția devine :

$$f'(z)=\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}+i(\theta_1+2\pi-\theta_2+2k\pi)=2\pi i+f(z).$$

Dacă arcul descris înconjoară pe $z=-i$, funcția devine

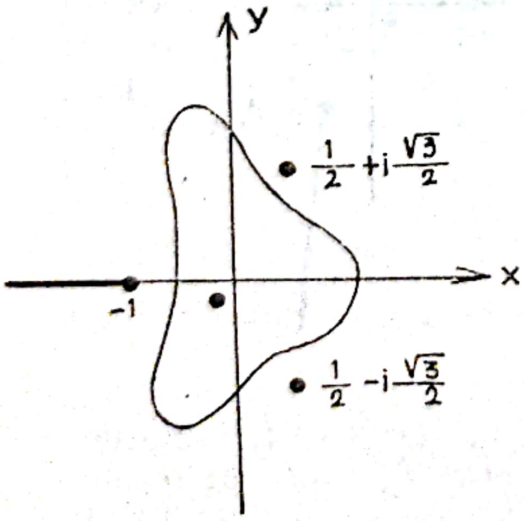


Fig. 3.10.5

$$f''(z)=\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}+i(\theta_1-\theta_2-2\pi+2k\pi)=$$
$$=f(z)-2\pi i.$$

Dacă arcul descris înconjoară punctele $\pm i$, funcția devine

$$f'''(z)=\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}+i(\theta_1+2\pi-\theta_2-$$
$$-2\pi+2k\pi)=f(z).$$

Făcînd una din tăieturile din fig. 3.10.6, ramurile funcției devin uniforme. Aceste ramuri sînt unifor-

me și în orice domeniu simplu conex care nu conține nici unul din punctele critice ale funcției $f(z)$.

3. Cu notația $z - i = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $z + i = \rho_2 e^{i\theta_2}$, funcția se scrie

$$f(z) = (\rho_1\rho_2)^{\frac{1}{2}} e^{k\pi i + \frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2)} [\ln(\rho_1\rho_2) + i(\theta_1 + \theta_2 + 2k_1\pi], \quad k, k_1 \in Z.$$

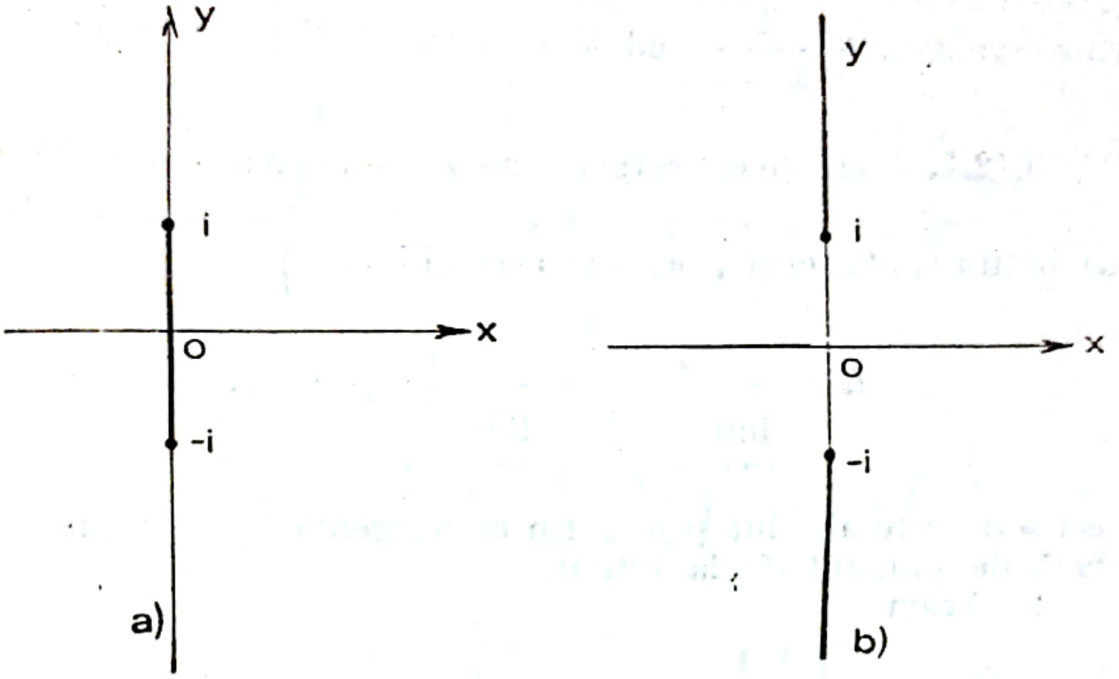


Fig. 3.10.6

Studiind funcția ca la 1 și 2 se arată că ramurile funcției sînt uniforme în planul înzestrat cu tăieturile din fig. 3.10.6 (b) și în orice domeniu simplu conex care nu conține nici unul din punctele critice $z = i$, $z = -i$.

3.11.1. Avem.

$$S_n = z\left[1 + \left(\frac{1}{1+z} - 1\right) + \left(\frac{1}{1+2z} - \frac{1}{1+z}\right) + \right.$$

$$\left. + \ldots + \left(\frac{1}{1+nz} - \frac{1}{1+(n-1)z}\right)\right] = \frac{z}{1+nz}.$$

Cînd $n \to \infty$ pentru $|z| < 1$, $S_n \to 0$, prin urmare, seria este convergentă în interiorul cercului $|z| < 1$.

Termenul general al seriei tinde la 0 cînd $n \to \infty$.

2. $S_n = \dfrac{1 - z^n}{1 - z}$ și pentru $|z| < 1$, $S_n \to \dfrac{1}{1 - z}$ cînd $n \to \infty$, deci seria este convergentă în $|z| < 1$. Pentru $|z| \geqslant 1$ seria

este divergentă căci termenul general nu tinde la 0 cînd $n \to \infty$. Pentru $|z| = 1$ exceptînd $z = 1$, $|S_n| < \frac{z}{|1-z|}$, deci seria este nedeterminată, dar şirul $\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}$ este convergent către $\frac{1}{1-z}$ cînd $n \to \infty$.

3.12.1. Raza de convergenţă a seriei este (dacă şirul $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ are limita b, atunci şi $\sqrt[n]{|a_n|}$ are aceeaşi limită)

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{|a^{(n+1)^2}|}{|a^{n^2}|}} = \infty,$$

deci seria este absolut şi uniform convergentă în tot planul în afară de punctul de la infinit.

2. Avem

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left| \frac{\cos(n+1)\,i}{2\cos n\,i} \right|} = \frac{2}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left| \frac{\mathrm{ch}(n+1)}{\mathrm{ch}\, n} \right|} = \frac{2}{e}.$$

În $|z| < \frac{2}{e}$ seria este absolut convergentă, iar pentru $|z| \geqslant \frac{2}{e}$ este divergentă.

3. Se obţine $R = 1$; pentru $|z| < 1$ seria este absolut convergentă; pentru $|z| > 1$ seria este divergentă, iar pentru $|z| = 1$ avem seria $\sum \frac{e^{in}}{n^2}$ care este absolut convergentă.

4. $R = 2$, seria este absolut convergentă în cercul $|z + 3i| < 2$, iar în rest divergentă.

5. $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{1-3ni}{n+2i} \right)^n \right|}} = \frac{1}{3}$, deci seria este absolut convergentă în punctele discului $|z| < \frac{1}{2}$, iar în rest este divergentă.

Scanned with OKEN Scanner

6. $R = \frac{1}{e}$. În discul $|z| < \frac{1}{e}$ seria este absolut convergentă, iar în rest divergentă.

3.13. Funcția $f(z)$ admite punctele $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$ ca poli simpli și se poate scrie:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{z}{z-2} - \frac{1}{z-3}.$$

În cercul $|z| < 1$ funcția este olomorfă și avem

$$\frac{1}{z-1} = -(1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots),$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{z}{2} - 1} = -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z}{2}\right)^n + \ldots\right],$$

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\left[1 + \frac{z}{3} + \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z}{3}\right)^n + \ldots\right],$$

deci în cercul $|z| < 1$ dezvoltarea funcției în serie este

$$f(z) = -\frac{2}{3} - \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2}\right)z - \left(1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^3}\right)z^2 - \ldots - \left(1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n - \ldots$$

sau

$$f(z) = -\frac{2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n.$$

Pentru a dezvolta funcția în serie în jurul punctului $z = 1$ scriem funcția $f(z)$ sub forma:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{z-1}{(z-1)-1} + \frac{1}{(z-1)-1} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{z-1}{2} - 1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În interiorul cercului cu centrul în punctul $z = 1$ și de rază 1 avem $|z-1|<1$, deci cu atît mai mult $\left|\frac{z-1}{2}\right|<1$, deci

$$\frac{1}{(z-1)-1} = -[1+(z-1)+(z-1)^2+\ldots+(z-1)^n+\ldots]$$

$$\frac{1}{\frac{z-1}{2}-1} = -\left[1+\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-1}{2}\right)^n+\ldots\right]$$

și

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \Phi \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-2\right)(z-1)^n.$$

Vom scrie acum funcția $f(z)$ sub forma

$$f(z) = \frac{1}{1+(z-2)} + 1 + \frac{2}{z-2} + \frac{1}{1-(z-2)}.$$

În interiorul cercului cu centrul în $z = 2$ și raza 1 avem $|z-2|<1$, deci

$$\frac{1}{1+(z-2)} = 1-(z-2)+(z-2)^2-\ldots+(-1)^n(z-2)^n+\ldots$$

$$\frac{1}{1-(z-2)} = 1+(z-2)+(z-2)^2+\ldots+(z-2)^n+\ldots,$$

iar dezvoltarea în serie a funcției în coroana circulară $0<|z-2|<1$ este

$$f(z) = \frac{2}{z-2} + 3 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(z-2)^{2n}.$$

Pentru a obține dezvoltarea în serie a funcției $f(z)$ în jurul punctului $z = 3$ o vom scrie sub forma

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-3}{2}} + \frac{z-3}{(z-3)+1} + \frac{3}{(z-3)+1} - \frac{1}{z-3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

și procedînd ca mai sus se obține

$$f(z) = \frac{-1}{z-3} + \frac{7}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(2 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-3)^n.$$

3.14. Funcția $\sqrt{2-z^2}$ are punctele critice $\pm\sqrt{2}$, deci ramura considerată este uniformă în interiorul și exteriorul cercului $|z| = \sqrt{2}$. Funcția $\sqrt[3]{3-z^2}$ este uniformă în interiorul și exteriorul cercului $|z| = \sqrt[3]{3}$. Ramura considerată a funcției $f(z)$ este uniformă în domeniile date.

1. Scriem

$$f(z) = \sqrt{2}\left(1 - \frac{z^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{3}\left(1 - \frac{z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

În domeniul $|z| < \sqrt{2}$ avem $\left|\frac{z^2}{2}\right| < 1$ și $\left|\frac{z^2}{3}\right| < 1$. Vom aplica formula seriei binomiale:

$$\left(1 - \frac{z^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{2} - \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^4}{2^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{z^6}{2^3} - \\ - \ldots - \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\frac{z^{2n}}{2^n} - \ldots$$

$$\left(1 - \frac{z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{z^2}{3^2} - \frac{1\cdot 2}{2!}\left(\frac{z}{3}\right)^4 - \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3!}\left(\frac{z}{3}\right)^6 - \\ - \ldots - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 11\ldots(3n-4)}{n!}\left(\frac{z}{3}\right)^{2n} - \ldots$$

și

$$f(z) = 2 - \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\frac{1}{2^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 11\ldots(3n-4)}{n!}\frac{1}{3^{2n-\frac{1}{3}}}\right)z^{2n}.$$

2. Scriem funcția sub forma

$$f(z) = iz\left(1 - \frac{2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{3}\left(1 - \frac{z^2}{3}\right)^{\frac{1}{3}},$$

deoarece avem $|z|>\sqrt{2}$ deci $\left|\frac{2}{z^2}\right|<1$,

iar

$$\left(1-\frac{2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{z^2}-\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{2^2}{z^4}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{2^3}{z^6}-$$
$$-\ldots-\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{2^n}{z^{2n}}-\ldots$$

și

$$f(z)=-\frac{i}{z}-i\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{2^n}{z^{2n-1}}+$$
$$+1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 11\ldots(3n-4)}{n!}\cdot\frac{1}{3^{2n-\frac{1}{3}}}\cdot z^{2n}.$$

3. Dacă $|z|>\sqrt[3]{3}$, $\left|\frac{2}{z^2}\right|<1$, $\left|\frac{3}{z^2}\right|<1$, deci scriem funcția $f(z)$ sub forma

$$f(z)=iz\left(1-\frac{2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{3}{z^2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

iar dezvoltarea va fi

$$f(z)=iz-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{2^n}{z^{2n-1}}+$$
$$+z^{\frac{2}{3}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 5\ldots(3n-4)}{n!}\cdot\frac{3^2}{z^{2n-\frac{1}{3}}}.$$

3.15. Fie $$\frac{z}{e^z-1}=1+\frac{B_1}{1!}z+\frac{B_2}{2!}z^2+\ldots+\frac{B_n}{n!}z^n+\ldots,\quad(1)$$

unde coeficienții $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ se numesc numerele lui Bernoulli. Raza de convergență este 2π. Scriem egalitatea de mai sus astfel (ținem seama de dezvoltarea lui e^z)

$$z=\left(1+\frac{B_1}{1!}z+\frac{B_2}{2!}z^2+\ldots+\frac{B_n}{n!}z^n+\ldots\right)\left(\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

Identificînd coeficienţii

$$1 + \frac{2!\,B_1}{1!} = 0$$

$$1 + \frac{3!\,B_1}{1!} + \frac{3!\,B_2}{2!} = 0$$

. . . . . .

$$1 + \frac{n!\,B_1}{(n-1)!\,1!} + \frac{n!\,B_2}{(n-2)!\,2!} + \ldots + \frac{n!\,B_{n-1}}{1!\,(n-1)!} = 0$$

obţinem relaţia de recurenţă dintre aceste numere care simbolic se poate scrie

$$(1 + B)^{(n)} - B_n = 0,$$

înţelegînd că în dezvoltarea $(1 + B)^{(n)}$ se înlocuieşte B^p cu B_p.

Rezultă $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, $\cdots$ numerele lui Bernoneli cu indici impari în afară de B_1 sînt nule, lucru care se vede uşor scriind (1) sub forma

$$\frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)} = \frac{z}{2}\operatorname{cth}\frac{z}{2} = 1 + \frac{B_2 z^2}{2!} + \ldots + \frac{B_n}{n!}z^n + \ldots,$$

membrul întîi fiind o funcţie pară de z.

2. În $|z| < 1$ scriem

$$e^{\frac{1}{1-z}} = e^u = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \quad (2)$$

urmînd să determinăm coeficienţii c_i, $(i = 0, 1, 2, \ldots 1)$, unde

$$u = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots.$$

Făcînd $z = 0$ se obţine $c_0 = e$.

Derivăm (2)

$$\frac{1}{(1-z)^2}\, e^{\frac{1}{1-z}} = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \ldots + nc_n z^{n-1} + \ldots,$$

de unde rezultă $c_1 = e$,
apoi din

$$\left[\frac{1}{(1-z)^4} + \frac{2}{(1-z)^3}\right] e^{\frac{1}{1-z}} = 2c_2 + 2.3.c_3 z + \dots$$

se obține $c_2 = \frac{3}{2} e$ ș.a.m.d. Deci primii termeni ai dezvoltării sint

$$e^{\frac{1}{1-z}} = e + ez + \frac{3}{2} ez^n + \dots .$$

3.16. Avem

$$\sin\frac{z+1}{z-1} = \sin\left(1 - \frac{1}{z-1}\right) =$$

$$= \sin 1 \cos\frac{1}{z-1} - \cos 1 \sin\frac{1}{z-1},$$

dar

$$\sin\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3} +$$

$$+ \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!\,(z-1)^{2n+1}} + \dots$$

$$\cos\frac{1}{z-1} = 1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-2)^4} +$$

$$+ \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!\,(z-1)^{2n}} + \dots$$

și

$$f(z) = \sin 1 - \frac{\cos 1}{z-1} - \frac{\sin 1}{2!\,(z-1)^2} + \frac{\cos 1}{3!\,(z-1)^3} + \dots$$

$$\dots + (-1)^n \frac{\sin 1}{(2n)!\,(z-1)^{2n}} + (-1)^{n+1} \frac{\cos 1}{(2n+1)!\,(z-1)^{2n+1}} + \dots .$$

3.17. Funcția $f(z)$ are punctele critice $z = \pm 1$. Determinarea considerată este uniformă în domeniile considerate.

Scanned with OKEN Scanner

În $|z| < 1$ avem

$$\ln(1-z) = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n} + \ldots$$

$$\ln(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + \ldots$$

și

$$f(z) = \ln(1-z) - \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n}.$$

Cu transformarea $z = \frac{1}{u}$, $|z| > 1$ se transformă în $|u| < 1$, iar funcția devine

$$F(u) = \ln\frac{u-1}{u+1} = \pi i + \ln\frac{1-u}{1+u},$$

deci

$$F(u) = \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{2n}}{n},$$

iar

$$f(z) = \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nz^{2n}}.$$

3.18. Funcția dată are pe $z = 0$ ca pol dublu, iar punctele $z = k\pi$, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, poli simpli. În jurul lui $z = 0$ avem

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ldots}.$$

În $|z| < \pi$ funcția

$$f_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ldots}$$

este olomorfă, deci putem scrie

$$f_1(z) = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots,$$

Scanned with OKEN Scanner

iar prin identificare după ce efectuăm produsul de serii găsim

$$a_0 = 1,\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_4 = \frac{7}{360}, \ldots$$

și

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{6} + \frac{7}{360} z^2 + \ldots .$$

Pentru a dezvolta funcția $f(z)$ în jurul punctului $z = \pi$ vom face substituția $z = t + \pi$. Funcția devine

$$F(t) = \frac{-1}{(t + \pi) \sin t},$$

sau

$$F(t) = -\frac{1}{t\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t}{\pi}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \ldots}.$$

În interiorul cercului $|t| < \pi$ avem $\left|\frac{t}{\pi}\right| < 1$ și deci

$$\frac{1}{1 + \frac{t}{\pi}} = 1 - \frac{t}{\pi} + \frac{t^2}{\pi^2} - \frac{t^3}{\pi^3} + \ldots + (-1)^n \frac{t^n}{\pi^n} + \ldots .$$

Deci

$$F(t) = -\frac{1}{\pi t}\left(1 - \frac{t}{\pi} + \frac{t^2}{\pi^2} + \right.$$

$$\left. + \ldots + (-1)^n \frac{t^n}{\pi^n} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{6} t^2 + \frac{7}{360} t^4 + \ldots\right)$$

sau

$$F(t) = -\frac{1}{\pi t} + \frac{1}{\pi^3} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{6}\right) t + \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{1}{6\pi}\right) t^2 -$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi^4} + \frac{1}{6\pi^2} + \frac{7}{360}\right) t^3 + \ldots .$$

Scanned with OKEN Scanner

Revenind la variabila z rezultă că pentru $|z-\pi|<\pi$ avem

$$f(z)=-\frac{1}{\pi(z-\pi)}+\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{6}\right)(z-\pi)+$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(1+\frac{1}{6\pi}\right)(z-\pi)^2+\ldots.$$

3.19. Avem

$$\int_\Gamma \frac{dz}{|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|}=2\left[\int_{AB}\frac{dx+idy}{x+y}+\right.$$
$$\left.+\int_{BC}\frac{dx+i\,dy}{y-x}+\int_{CD}\frac{dx+idy}{-x-y}+\int_{DA}\frac{dx+idy}{x-y}\right].$$

Pe

$AB: x=u,\ y=1-u,\ u\in[0,1], \int_{AB}\frac{dx+idy}{x+y}=$

$$=\int_0^1(1-i)\,du=1-i.$$

$BC: x=u,\ y=1+u,\ u\in[-1,0], \int_{BC}\frac{dx+idy}{y-x}=-1-i.$

$CD: x=u,\ y=-1-u,\ u\in[-1,0], \int_{CD}\frac{dx+idy}{-x-y}=i-1.$

$DA: x=u,\ y=u-1,\ u\in[0,1], \int_{DA}\frac{dx+idy}{x-y}=1+i.$

Rezultă

$$\int_\Gamma \frac{dz}{|z-\bar{z}|+|z-\bar{z}|}=0.$$

3.20.1. Avem pentru curba (C) reprezentarea parametrică

$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta,\ 0\leqslant\theta<\pi$ și $z=e^{i\theta},\ dz=ie^{i\theta}\,d\theta,$

deci

$$\int_c\frac{dz}{\sqrt{z}}=i\int_0^\pi e^{i\frac{\theta}{2}}\,d\theta=-2(1-i).$$

2. $\int_c\frac{dz}{\sqrt{z}}=-2(1+i).$

Scanned with OKEN Scanner

Funcția $\sqrt{z}$ nu este uniformă, deci integrala depinde de drum.

3.2.1. Funcția $f_1(z) = \ln \dfrac{z+1}{z+1}$ are ca puncte critice pe $z = -1$ și $z = 1$.

Fiecare ramură a sa este uniformă în orice domeniu simplu conex care nu conține punctele $z = \pm 1$, sau în tot planul complex din care s-a scos segmentul $[-1,1]$.

Funcția

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2} \ln \frac{z+1}{z-1}$$

are ca poli simpli pe

$$z = -\sqrt{2} \text{ și } z = \sqrt{2}.$$

1. $|z| = \dfrac{1}{2}$. În acest caz există un domeniu D care conține curba (C) și în interiorul căruia nu există nici unul din punctele singulare. Deci în interiorul lui D funcția este olomorfă și

$$\int_c f(z)\,dz = 0.$$

2. $|z| = 3$. În interiorul domeniului D care conține curba (C) și din care s-a scos segmentul $[-1, 1]$, funcția este meromorfă având polii simpli $z = -\sqrt{2}$ și $z = \sqrt{2}$, deci

$$\int_c f(z)\,dz = 2\pi i\,(R_{-\sqrt{2}} + R_{\sqrt{2}}),$$

cu

$$R_{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}, \quad R_{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},$$

și

$$\int_c f(z)\,dz = \pi i \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.2.2. Funcţia $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)\sqrt{z^2+1}}$ are două puncte critice $z = \pm i$ şi doi poli simpli $z = \pm 1$. Funcţia fiind regulată în punctul de la infinit, putem considera conturul din fig. 3.22.

În interiorul acestui contur avem polul $z_1 = 1$.

$$R_{z_1} = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{(z-1)(z+1)\sqrt{z^2+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Rezultă

$$\int_c f(z)\,dz = \pi i \sqrt{2}.$$

3.23. Funcţia $f(z) = z^n e^{\frac{1}{z}}$ admite pe $z = 0$ ca punct singular esenţial.

Pentru a determina reziduul funcţiei în origine vom dezvolta funcţia $f(z)$ în serie de puteri ale lui z în jurul originii.

Avem

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{2!z^2} + \frac{2^3}{3!z^3} + \cdots + \frac{2^n}{n!z^n} + \cdots$$

şi

$$z^n e^{\frac{1}{z}} = z^n + 2z^{n-1} + \frac{2^2}{2!} z^{n-2} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{z} + \cdots,$$

deci

$$a_{-1} = R_0 = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \text{ dacă } n \geqslant -1 \text{ şi } R_0 = 0 \text{ dacă } n < -1.$$

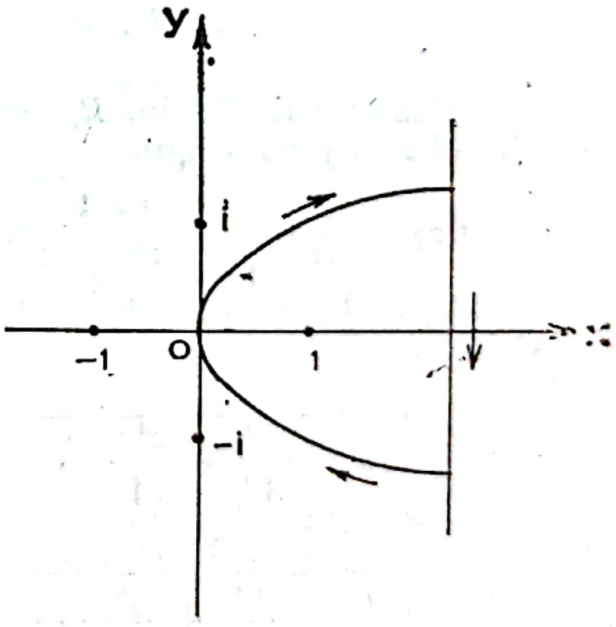


Fig. 3.22

Pentru

$$n \geqslant -1, \int_c z^n e^{\frac{2}{z}}\, dz = \frac{2^{2(n+1)}}{(n+1)!}\pi i$$

și pentru $n < -1$, $\int_c z^n e^{\frac{2}{z}}\, dz = 0$.

3.24. Dacă $a < 1$, $I = 0$.
Dacă $a > 1$, în interiorul domeniului $|z| = a$ funcția

$$f(z) = \frac{ze^z}{(z-1)^2}$$

are pe $z = 1$ pol de ordinul 2. Deci

$$I = 2\pi i R_1 = 2\pi i e.$$

2. $f(z) = \dfrac{z}{\sin z \cdot (1 - \cos z)}$ are pe $z = 0$ pol dublu și punctele $z = (2k+1)\pi$ poli simpli, iar $z = 2\pi k$, $(k \in Z)$ poli tripli. În interiorul domeniului $|z| = 4$ funcția are punctele singulare $z = 0$, $z = \pi$, $z = -\pi$, deci

$$\int_{|z|=4} \frac{z\,dz}{\sin z \,.\, (1 - \cos z)} = 2\pi i (R_0 + R_\pi + R_{-\pi}).$$

Avem

$$R_\pi = -\frac{\pi}{2}, \quad R_{-\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Pentru calculul lui R_0 dezvoltăm funcţia în serie de puteri ale lui z în jurul originii

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \cdots} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} \cdots},$$

și

$$\frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \cdots} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots;$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} \cdots} = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste funcţii fiind pare avem $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = S_1 = S_3 = S_5 = \ldots = 0$. Deci într-o vecinătate a originii vom obţine

$$f(z) = \frac{C_0}{z^2} + C_2 + C_4 z^2 + \ldots .$$

Rezultă $R_0 = 0$.
Deci

$$\int_{|z|=4} \frac{z\,dz}{\sin z.(1-\cos z)} = 0.$$

3. Funcţia $f(z) = \dfrac{e^{\lambda z + \frac{z^2}{2}}}{z^{n+1}}$ are în interiorul domeniului $|z| = a$ ca punct singular pe $z = 0$. Deci

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i R_0.$$

R_0 va fi coeficientul lui z^n din dezvoltarea în serie în jurul originii a funcţiei $e^{\lambda z + \frac{z^2}{2}}$.

Avem

$$e^{\lambda z + \frac{z^2}{2}} = e^{\frac{1}{2}(z+\lambda)^2} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}},$$

iar

$$e^{\frac{1}{2}(z+\lambda)^2} = \varphi(z+\lambda) = \varphi(\lambda) + \ldots + \frac{z^n}{n!}\frac{d^n\varphi(\lambda)}{d\lambda^n} + \ldots,$$

deci

$$R_0 = \frac{1}{n!} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \frac{d^n !}{d\lambda^n}(e^{\frac{\lambda^2}{2}}).$$

3.25.1. Considerăm funcţia $f(z) = e^{-z^2}$ pe conturul din fig. 3.25.1. Teorema reziduurilor ne dă

$$\int_0^R e^{-x^2}\,dx + \int_{AB} e^{-z^2}\,dz + \int_{BO} e^{-z^2}\,dz = 0,$$

funcţia e^{-z^2} fiind o funcţie întreagă. Făcînd pe $R \to \infty$ în această egalitate, prima integrală tinde la integrala lui Gauss:

$$\int_0^\infty x^{-p}\,dx = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right).$$

Pe arcul AB avem

$$z = R(\cos\theta + i\sin\theta),\ |e^{-z^\alpha}| \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}$$

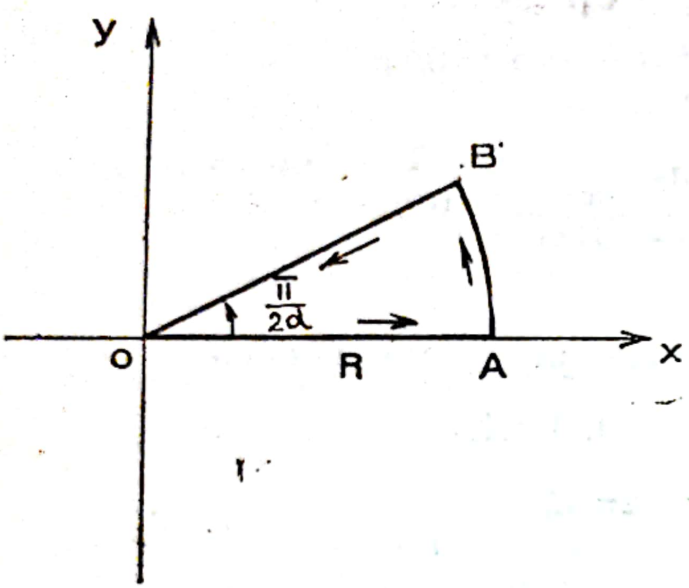


Fig. 3.25.1

și integrînd prin părți

$$\int_{AB} e^{-z^\alpha}\,dz = \int_{AB} \frac{z^{\alpha-1}e^{-z^\alpha}}{z^{\alpha-1}}\,dz = \left[\frac{-e^{-z^\alpha}}{(\alpha-1)z^{\alpha-1}}\right]_{AB} - \int_{AB} \frac{e^{-z^\alpha}}{z^\alpha}\,dz,$$

dar

$$|zf(z)| = \left|\frac{e^{-z^\alpha}}{z^{\alpha-1}}\right| \leqslant \frac{1}{R},$$

deci

$$\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0,$$

rezultă

$$\lim_{R\to\infty} \int_{AB} \frac{e^{-z^\alpha}}{z^\alpha}\,dz = 0$$

și

$$\lim_{R\to\infty} \int_{AB} e^{-z^\alpha}\,dz = 0.$$

Pe BO avem

$$\int_{BO} e^{-z^\alpha}\,dz = e^{i\frac{\pi}{2\alpha}} \int_R^0 e^{-ir^\alpha}\,dr = -e^{i\frac{\pi}{2\alpha}} \left[\int_0^R \cos r^\alpha\,dr - i\int_0^R \sin r^\alpha\,dr\right]$$

prin urmare, cînd $R \to \infty$

$$\int_{BO} e^{-z^\alpha}\,dz \to (-e^{i\frac{\pi}{2\alpha}})(I_1 - iI),$$

de unde

$$I = \frac{1}{p}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\sin\frac{\pi}{2\alpha},\quad I_1 = \frac{1}{p}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2\alpha}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Considerăm funcţia $f(z)=\dfrac{\ln z}{\sqrt{z}\,(z^2+a^2)}$ (luînd pentru radical determinarea pozitivă iar pentru logaritm determinarea principală) şi conturul din fig. 3.25.2, avem

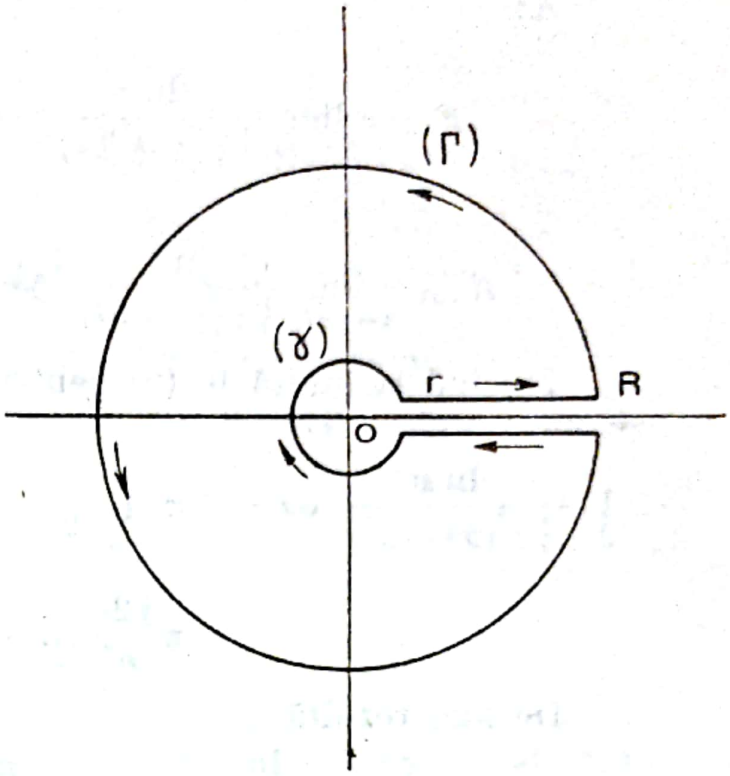


Fig. 3.25.2

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,(R_{ai}+R_{-ai}), \tag{1}$$

şi

$$\int_C \frac{\ln z}{\sqrt{z}\,(z^2+a^2)}\,dz =$$

$$= \int_r^R \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x^2+a^2)}\,dx +$$

$$+ \int_\Gamma \frac{\ln z}{\sqrt{z}\,(z^2+a^2)}\,dz + \tag{2}$$

$$+ \int_R^r \frac{\ln x + 2\pi i}{-\sqrt{x}\,(x^2+a^2)}\,dx + \int_\gamma \frac{\ln z}{\sqrt{z}\,(z^2+a^2)}\,dz,$$

dar $|zf(z)| = \left|\dfrac{\sqrt{z}\ln z}{z^2+a^2}\right| \to 0$ cînd $|z| \to \infty$,

deci

$$\int_\Gamma \frac{\ln z}{\sqrt{z}\,(z^2+a^2)}\,dz \to 0 \text{ pentru } R \to \infty.$$

Analog

$$\int_\gamma \frac{\ln z}{\sqrt{z}\,(z^2+a^2)}\,dz \to 0, \text{ pentru } r \to 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$R_{ai} = \lim_{z \to ai} \frac{\ln z}{\sqrt{z}\,(z + ai)} = \frac{\sqrt{2a}\left(\ln a + i\frac{\pi}{2}\right)}{2a^2 i\,(1 + i)};$$

$$R_{-ai} = \lim_{z \to -ai} \frac{\ln z}{\sqrt{z}\,(z - ai)} = \frac{\sqrt{2a}\left(\ln a + \frac{3\pi}{2} i\right)}{2a^2 i(1 + i)}.$$

Trecînd la limită în (2) pentru $R \to \infty$ și $r \to 0$ și ținînd seama de (1) avem

$$2\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x^2 + a^2)}\,dx + 2\pi i \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x^2 + a^2)} = \frac{\pi\sqrt{2a}}{a^2}(\ln a + \pi) +$$

$$+ i\pi\frac{\sqrt{2a}}{a^2}[\pi - \ln a].$$

De aici rezultă

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x^2 + a^2)}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2a}}{2a^2}[\ln a + \pi].$$

3. Utilizînd conturul din fig. 3.25.2 pentru funcția : $f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}$, avem

$$\int_r^R \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx + \int_\Gamma \frac{z^{\alpha-1}}{1+\alpha}\,dz + e^{2\pi i\alpha}\int_R^r \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx + \int_\gamma \frac{z^{\alpha-1}}{z+1}\,dz = 2\pi i F_{-1}.$$

Dar $R_{-1} = -e^{\pi i\alpha}$.

Trecînd la limită în această egalitate pentru $R \to \infty$ și $r \to 0$ și observînd că $\int_\Gamma \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\,dz \to 0$ pentru $R \to \infty$ și $\int_\gamma \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\,dz \to 0$, pentru $r \to 0$ obținem

$$(1 - e^{2\pi i\alpha})\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = -2\pi i e^{\pi i\alpha},$$

de unde

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Analog se obține $I_1 = \pi \operatorname{ctg} \pi\alpha$.

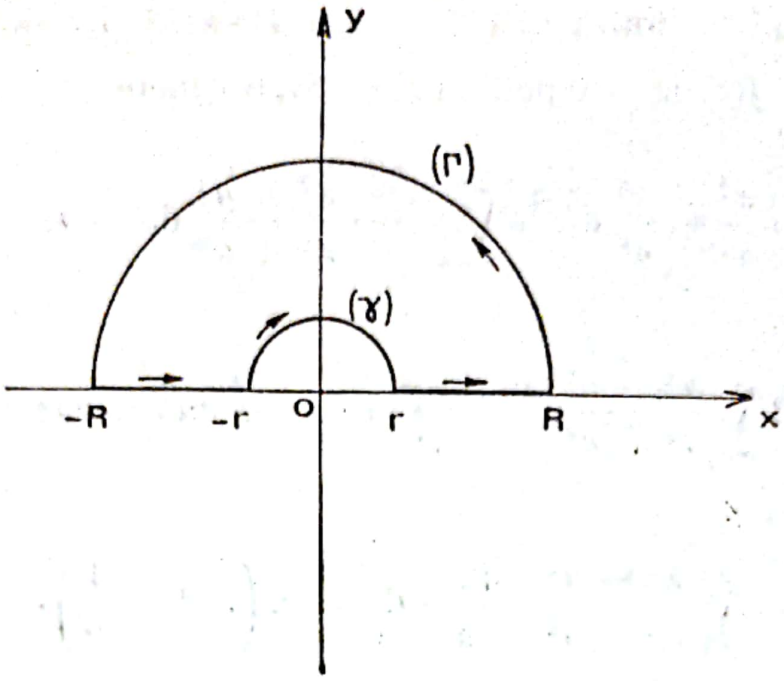


Fig. 3.25.3

4. Integrăm funcţia $f(z) = \dfrac{z^2 - a^2}{z^2 + a^2} \cdot \dfrac{e^{iz}}{z}$ pe conturul din figura 3.25.3. În interiorul domeniului funcţia $f(z)$ are polul simplu $z = ai$, deci teorema reziduurilor ne dă

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} \cdot \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}\,dx + \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z} \cdot \frac{z^2 - a^2}{z^2 + a^2}\,dz +$$

$$+ \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} \cdot \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}\,dx + \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} \cdot \frac{z^2 - a^2}{z^2 + a^2}\,dz = 2\pi i e^{-a}, \quad (1)$$

deoarece $R_{ai} = e^{-a}$.

Avem

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + \frac{i}{1!} + \frac{i^2}{2!} z + \ldots + \frac{i^n}{n!} z^{n-1} + \ldots$$

şi

$$\int_\gamma \frac{z^2 - a^2}{z^2 + a^2} \cdot \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_\gamma \frac{dz}{z} + \int_\gamma f_1(z)\,dz, \text{ cu } \int_\gamma f_1(z)\,dz \to 0$$

pentru $r \to 0$, deci $\int_\gamma \dfrac{z^2 - a^2}{z^2 + a^2} \dfrac{e^{iz}}{z}\,dz \to -i\pi$ pentru $r \to 0$, căci

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_\pi^0 i\,d\theta = -\pi i.$$

Scanned with OKEN Scanner

Trecînd la limită în (1) pentru $R \to \infty$ și $r \to 0$ și ținînd seama că $\int_\Gamma f(z)\,dz \to 0$ pentru $R \to \infty$, obținem

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x} \cdot \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}\,dx + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x} \cdot \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}\,dx + i\pi = 2\pi i e^{-a}$$

sau

$$2i\int_0^\infty \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\,dx + \pi i = 2\pi i e^{-a},$$

deci

$$\int_0^\infty \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \cdot \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi\left(e^{-a} - \frac{1}{2}\right).$$

5. Fie funcția $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)}$ conturul (C) din fig. 3.25.4. Avem

$$\int_c \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)}\,dz = \pi i\,(R_1 + 2R_{2i}).$$

$$\int_c \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)}\,dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4)(x - 1)}\,dx +$$

$$+ \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)}\,dz = \frac{\pi i}{5}(\cos 1 + i \sin 1) + \qquad (1)$$

$$+ \frac{\pi}{10\,e^2}(-1 - 2i).$$

Trecînd la limită în (1) pentru $R \to \infty$ și ținînd seama că $|z f(z)| \to 0$ pentru $|z| \to \infty$, deci $\int_\Gamma f(z)\,dz \to 0$ pentru $R \to \infty$, obținem :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)}\,dx = -\frac{\pi}{5}\left(\sin 1 + \frac{1}{2\,e^2}\right) +$$

$$+ i\,\frac{\pi}{5}\left(\cos 1 - \frac{1}{e^2}\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

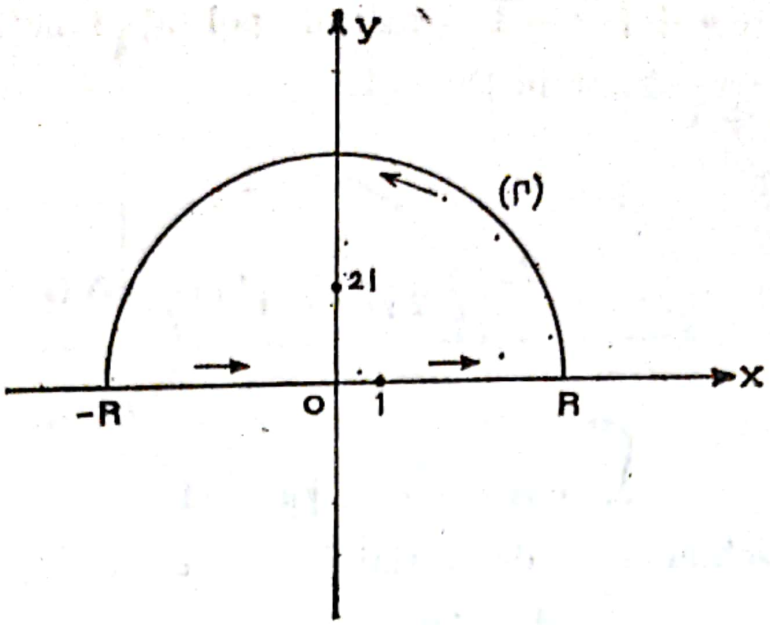


Fig. 3.25.4

de unde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)(x-1)}\,dx = -\frac{\pi}{5}\left(\sin 1 + \frac{1}{2e^2}\right);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\,dx = \frac{\pi}{5}\left(\cos 1 - \frac{1}{e^2}\right)$$

6. Considerăm funcţia

$$f(z) = \frac{(z+1)\,e^{2iz}}{z^2+2z+2}$$

şi conturul din fig. 3.25.4

$$\int_c \frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2+2z+2}\,dz = 2\pi i R_{-1+i}.$$

Procedînd ca la 5 obţinem :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx = \pi e^{-2}\cos 2.$$

7. Facem schimbarea de variabilă $z = e^{ix}$. Cu aceasta integrala devine

$$\frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1}\,dz = 4\pi R_{z_1},$$

unde $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ singurul pol al funcţiei $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2az + 1}$ situat în $|z| = 1$.

Avem

$$R_{z_1} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}},$$

deci

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + a} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

8. Cu schimbarea de variabilă $z = e^{ix}$ integrala devine

$$\frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{(z^4 + 1)^2}{z^4 (z - a)(az - 1)} dz = \pi(R_0 + R_a).$$

Făcînd calculele obţinem

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx = \pi \frac{1 + a^2}{1 - a^2}.$$

9. Fie funcţia $f(z) = \frac{\ln z}{1 - z}$. Această funcţie are pe $z = 0$ punct critic şi $z = 1$ pol simplu. Ea este olomorfă în vecinătatea lui $z = 1$ şi considerînd pentru logaritm determinarea principală, $f(z)$ este uniformă în domeniul D (fig. 3.25.5), care nu conţine punctul $z = 0$.

Convenim ca în punctul $z = \varepsilon$, $f(z)$ să fie egală cu numărul real negativ $\frac{\ln \varepsilon}{1 - \varepsilon}$ deci pe porţiunea axei reale interioară domeniului D, $f(z)$ este reală. În particular $f(1) = -1$.

Aplicăm teorema lui Cauchy:

$$\int_c f(z)\, dz = \int_\Gamma f(z)\, dz - \int_\gamma f(z)\, dz = 0. \qquad (1)$$

Dar $|zf(z)| \to 0$ pentru $|z| \to 0$ deci $\lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{\ln z}{1 - z} dz = 0$.

Pe (Γ), $|z| = 2\cos\theta$, $z = e^{2i\theta} + 1$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

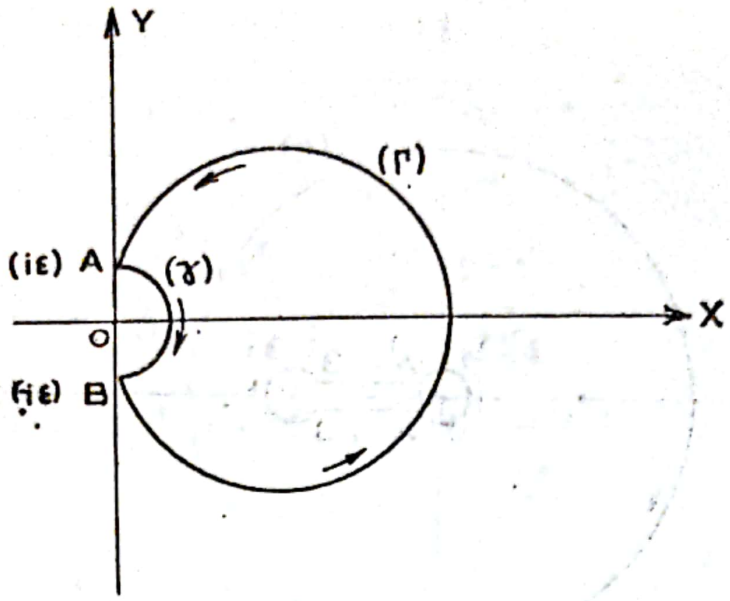


Fig. 3.25.5

Avem

$$1-z=e^{-2i\theta},\quad \frac{dz}{1-z}=2i\,d\theta,$$

deci trecînd la limită pentru $\varepsilon\to 0$ în (1) obţinem

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\theta\,d\theta+\pi\ln 2+i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\theta d\theta=0,$$

de unde rezultă

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx=-\pi\ln 2.$$

10. Funcţia $f(z)=\dfrac{\sqrt[3]{z(1-z)}}{(1+z)^2}$ are punctele critice $z=0$ şi $z=1$, iar $z=-1$ pol dublu. Vom calcula $\int_C f(z)\,dz$, unde (C) este conturul din fig. 3.25.6. Aplicînd teorema reziduurilor scriem :

$$\int_\Gamma f(z)\,dz-\int_\gamma f(z)\,dz=2\pi i R_{-1},$$

conturul (γ) fiind format din segmentele $AB\|A'B'\|Ox$ şi cercurile de rază ε cu centrele în 0 şi respectiv 1.

Scanned with OKEN Scanner

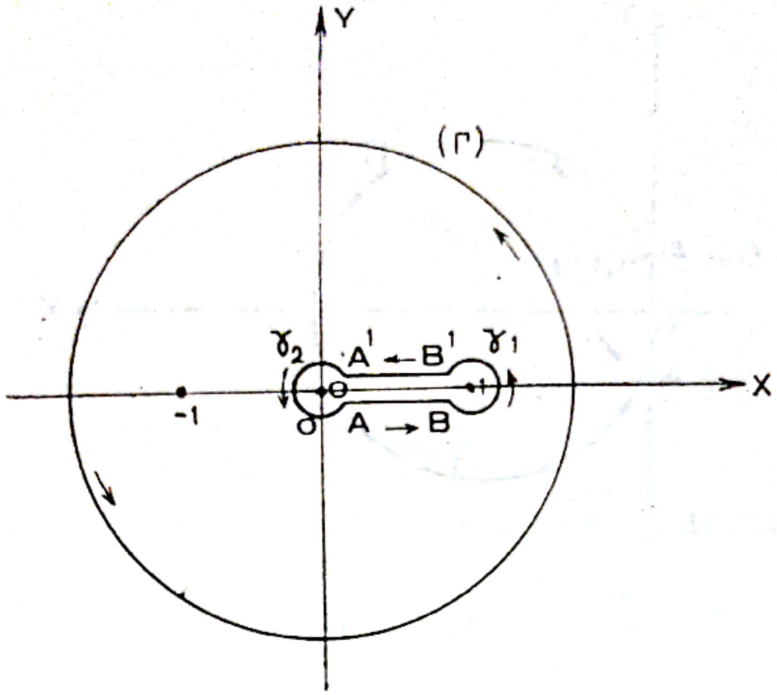


Fig. 3.25.6

Avem

$$|zf(z)| = \left|\frac{z\sqrt[3]{z(1-z)}}{(1+z)^2}\right| \to 0 \quad \text{pentru } |z| \to 0 \text{ și } |z| \to \infty, \text{ deci}$$

$\int_\Gamma f(z)\,dz \to 0$ pentru $|z| \to \infty$ și $\int_{\gamma i} f(z)\,dz \to 0$ pentru $|z| \to 0$, $(i = 1, 2)$.

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

$$\int_{B'A'} f(z)\,dz = -e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Trecînd la limită pentru $|z| \to \infty$ și $\varepsilon \to 0$ în egalitatea

$$\int_\Gamma f(z)\,dz - \int_{AB} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} l(z)\,dz -$$

$$-\int_{B'A'} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i R_1$$

obținem

$$(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}) \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x(1-x)}}{(1+x)^2}\,dx = -2\pi i R_{-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$R_{-1} = \left[e^{\frac{\pi i}{3}} \sqrt[3]{z(1-z)}\right]'_{z=-1} = \frac{e^{\frac{\pi}{3}}}{\sqrt[3]{4}}$$

deci :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x(1-x)}}{(1+x)^2}\,dx = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3\sqrt[3]{4}}.$$

11. Considerînd același contur din fig. 3.25.6 și funcția

$$f(z) = \frac{z^{1-\alpha}(1-z)^{\alpha}}{1+z}$$

și făcînd calculele obținem

$$\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi p}\,[1+p-2^p].$$

12. Considerăm conturul din fig. 3.25.7. Avem

$$\int_{1-ib}^{1+ib} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = 2\pi i\,(R_i + R_{-i}).$$

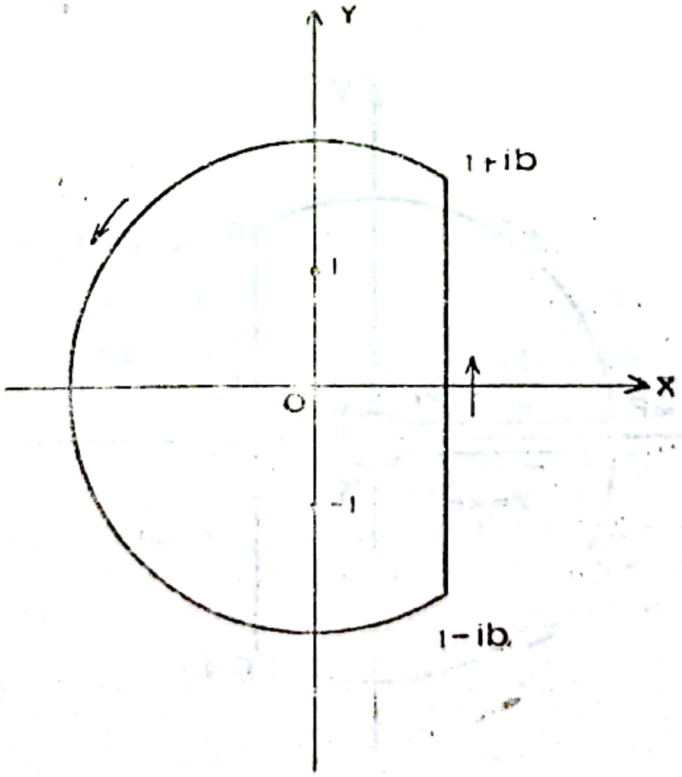


Fig. 3.25.7

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $|z| \to \infty$, $\int_\Gamma f(z)\,dz \to 0$, deci trecînd la limită pentru $b \to \infty$ obţinem

$$\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{tx}}{1+x^2}\,dx = 2\pi i \sin t.$$

13. Fie funcţia $f(z) = \dfrac{a^{z+2}}{z(z+1)(z+2)}$. Vom calcula

$$\int_c f(z)\,dz = \int_{c-ib}^{c+ib} f(z)\,dz + \int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i(R_0 + R_{-1} + R_{-2}),$$

unde (C) este conturul din fig. 3.25.8.

Avem $|zf(z)| \to 0$ pentru $|z| \to \infty$, deci trecînd la limită pentru $b \to \infty$ în egalitatea de mai sus obţinem

$$\frac{1}{2\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^{x+2}}{x(x+1)(x+2)}\,dx = \frac{(a-1)^2}{2}.$$

3.26. Se consideră funcţia $f(z) = \dfrac{e^{2z}\sqrt{z}}{z^2+\omega^2}$ şi conturul din fig. 3.25.8.

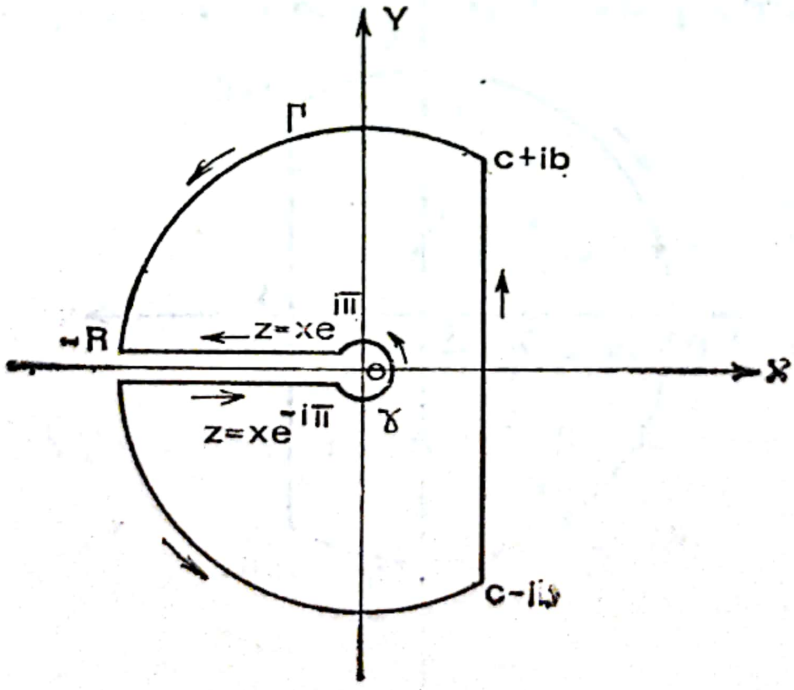


Fig. 3.25.8

3.27. Avem

$$\frac{a+b}{c+d}=0,\quad \frac{b}{d}=-1,\quad \frac{-ai+b}{-ci+d}=-\frac{1+i}{2},$$

de unde determinînd pe b, c, d în funcţie de a se obţine

$$w=i\frac{1-z}{z-i}.$$

Înlocuind pe $w=w_1+iw_2$, $z=x+iy$ obţinem

$$w_1=\frac{x+y}{x^2+(y-1)^2},\quad w_2=\frac{(x-y)(1-x-y)}{x^2+(y-1)^2}.$$

De aici deducem că dreapta $y=x$ se transformă în dreapta de ecuaţie $w_2=0$, dreapta de ecuaţie $y=-x$ se transformă în dreapta de ecuaţie $w_1=0$, dreapta de ecuaţie $x+y=1$ se transformă în dreapta de ecuaţie $w_2=0$.

3.23. Scriind că o transformare omografică păstrează raportul anarmonic

$$\frac{w-w'}{w-w''}:\frac{w'''-w'}{w'''-w''}=\frac{z-z'}{z-z''}:\frac{z'''-z'}{z'''-z''}$$

obţinem

$$w=\frac{z}{1+z^2},$$

de unde pentru $w=w_1+iw_2$, $z=x+iy$,

$$w_1=\frac{x(1+x^2+y^2)}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2},\quad w_2=\frac{y(1-x^2-y^2)}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

3.29. Funcţia $w=\frac{1}{2}(z+az^{-1})$ este monogenă în orice domeniu care nu conţine punctele $z=0$ şi $z=\infty$ şi ţinînd seama că $w'(z)=0$ pentru $z=\pm a$ rezultă că transformarea dată este conformă în orice domeniu care nu conţine punctele $z=0$, $z=\pm a$, $z=\infty$.

Scriem $z=\rho e^{i\theta}$ şi $w=w_1+iw_2$, avem

$$w_1=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{a^2}{\rho}\right)\cos\theta,\quad w_2=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{a^2}{\rho}\right)\sin\theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cercul $|z| = k$, (k = const.) se transformă în elipsa

$$\frac{w_1^2}{\frac{1}{4}\left(\rho + \frac{a^2}{\rho}\right)^2} + \frac{w_2^2}{\frac{1}{4}\left(\rho - \frac{a^2}{\rho}\right)^2} = 1,$$

cu focarele în punctele $(0, -a)$; $(0, a)$

Liniile $\arg z = k$ se transformă în hiperbole omofocale

$$\frac{w_1^2}{a^2 \cos^2 k} - \frac{w_2^2}{a^2 \sin^2 k} = 1, \text{ pentru } k \neq \frac{n\pi}{2},\ n \in Z.$$

Această transformare se numeşte transformarea lui Jukovski.

a) Domeniul dat se transformă în partea dreaptă a interiorului elipsei

$$\frac{w_1^2}{\frac{1}{4}\left(R + \frac{a^2}{R}\right)^2} + \frac{w_2^2}{\frac{1}{4}\left(R - \frac{a^2}{R}\right)^2} = 1$$

cu o tăietură de-a lungul segmentului $\left[a, \frac{1}{2}\left(R + \frac{a^2}{R}\right)\right]$.

b) Unghiul dat se transformă în domeniul dintre ramurile hiperbolei

$$\frac{w_1^2}{a^2 \sin^2 \varphi} - \frac{w_2^2}{a^2 \cos^2 \varphi} = 1.$$

3.30. Vom determina funcţia care transformă punctele $-1, 0, i$ în punctele $0, 1, \infty$, deci

$$u = i\frac{1+z}{i-z}.$$

Această funcţie transformă planul (z) cu tăietura dată în planul (u) din care s-a scos semiaxa reală pozitivă.

Fie funcţia

$$w = \sqrt{i\frac{1+z}{i-z}},$$

unde pentru radical se ia determinarea pozitivă. Dacă $u = \rho e^{i\theta}$, $w = \rho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{2}}$, deci dacă $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $0 \leqslant \frac{\theta}{2} < \pi$. Deci transformarea căutată este w.

Scanned with OKEN Scanner

3.31. Funcția $u = \sin^2 \frac{\pi z}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{z}$ transformă domeniul dat (fig. 3.31) în planul cu o tăietură după segmentul ce unește

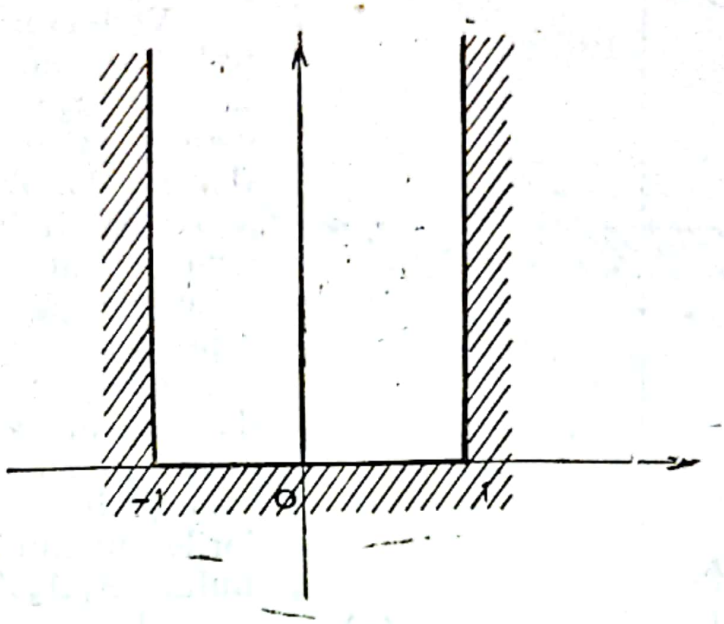


Fig. 3.31

punctele $u = 0$ și $u = 1 + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2}$, iar funcția $w = \sqrt{u}$ realizează transformarea ceurtă, deci

$$w = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi z}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2}}.$$

3.32. Funcția $u = i \frac{1 - w}{1 + w}$ reprezintă conform domeniul $|w| < 1$ în $\operatorname{Im} u > 0$.

Funcția $t = z^2$ reprezintă conform domeniul din fig. 3.32 în domeniul din fig. 3.32 (a); $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$, $0 < \arg t < \pi$, iar funcția $u = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t - 1}$ reprezintă conform domeniul din fig. 3.32 (b) în semiplanul $\operatorname{Im} u > 0$. Rezultă de aici transformarea

$$w = \frac{i(z^2 - 1) - \sqrt{z^4 + 1}}{i(z^2 - 1) + \sqrt{z^4 + 1}}.$$

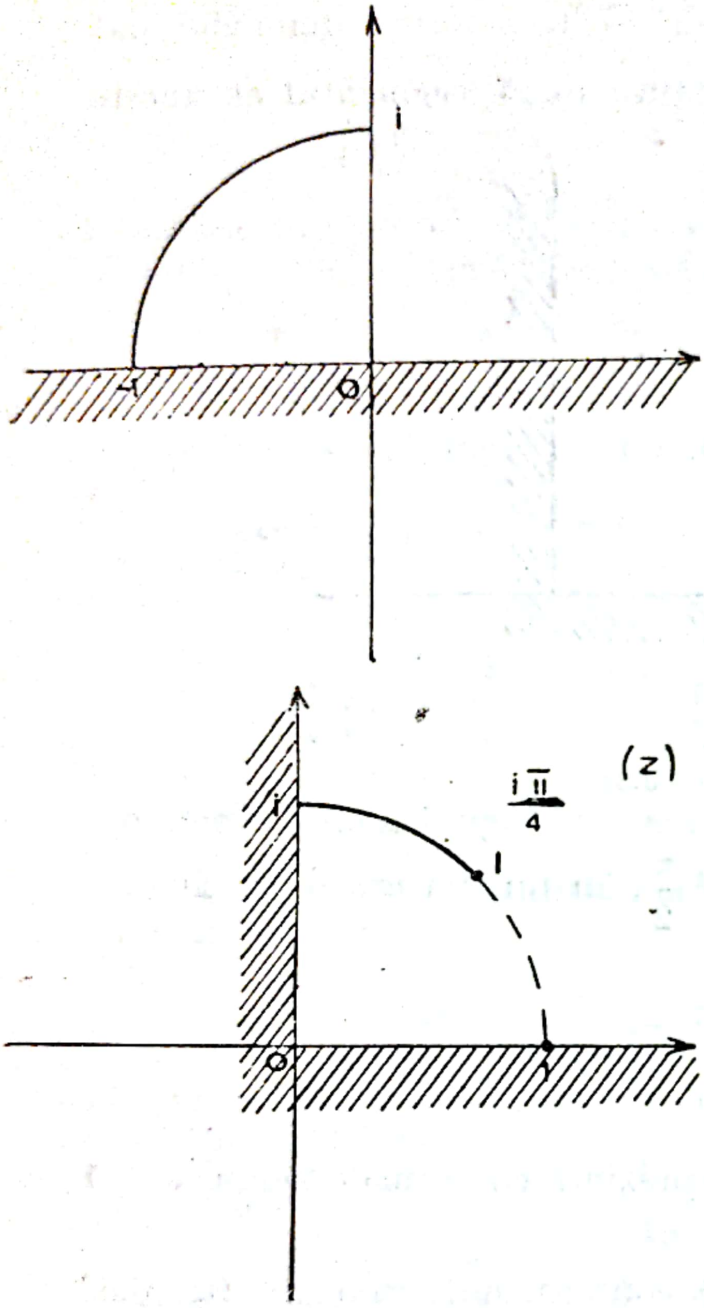


Fig. 3.32 a,b

3.33.1. Figura este simetrică față de axa imaginară, deci vom putea utiliza principiul simetriei.

Vom considera în planul (z) punctele $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = a^2$, $z_4 = \infty$ corespunzătoare vîrfurilor A_2, A_2, A_3, A_4 (trei parametri pot fi luați în mod arbitrar, aceasta fiind în concordanță cu faptul că reprezentarea conformă este complet determinată dacă se dă corespondența a trei puncte de pe contur). Ținînd seama de valorile unghiurilor poligonului $A_1 A_2 A_3 A_4$, avem $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \frac{3}{2}$, $\alpha_4 = 0$, $\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2\right)$, formula lui Schwartz-Christoffel ne dă

$$w = c\int_0^z \sqrt{\frac{z - a^2}{z}}\,\frac{dz}{z - 1} \quad (1)$$

Pentru determinarea constantelor C și a vom considera o creștere a lui w cînd z descrie cercurile de centre $z = 1$ și de raze $R \to \infty$ și $r \to 0$. În primul caz corespunde $A_1 A_4$ sau $A_3 A_4$, deci $\Delta w = H + 0\left(\frac{1}{R}\right)$, dar pentru $|z|$ suficient de mare (1) ne dă $\Delta w = C\Delta\int_0^z \frac{dz}{z - 1} + O\left(\frac{1}{R}\right) = -\pi i C + O\left(\frac{1}{R}\right)$, de unde rezultă $C = \frac{Hi}{\pi}$.

Scanned with OKEN Scanner

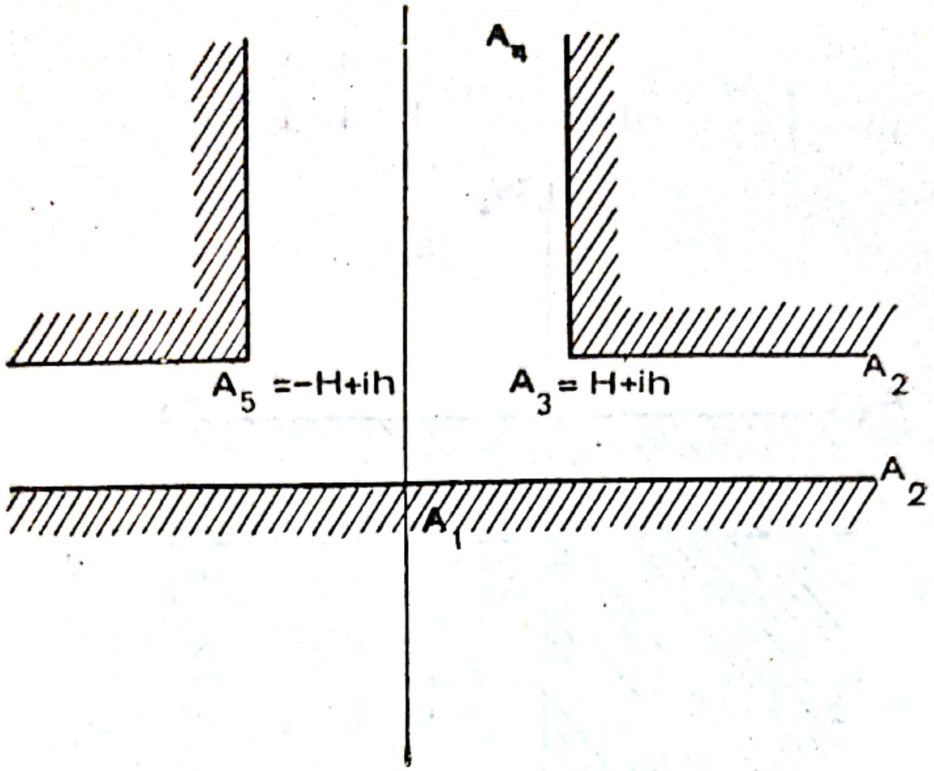


Fig. 3.33.1

Pentru al doilea parcurs corespunde $A_1 A_2$ sau $A_3 A_2$, deci $\Delta w = ih + O(r)$ și integrala (1) ne dă $\Delta w = C\sqrt{1-a^2}(-i\pi) + O(r)$ deci $a^2 = \dfrac{H^2+h^2}{H^2}$.

Integrala (1) se calculează ușor cu substituția $\dfrac{z-a^2}{z} = \dfrac{1}{u^2}$. Efectuînd calculele obținem înlocuind pe z cu z^2 (conform principiului simetriei)

$$w = \frac{h}{\pi}\ln\frac{\sqrt{(1-z^2)H^2+h^2}+hz}{\sqrt{(1-z^2)H^2+h^2}-hz} - i\frac{H}{\pi}\ln\frac{\sqrt{(1-z^2)H^2+h^2}+iHz}{\sqrt{(1-z^2)H^2+h^2}-iHz}.$$

2. Avem $\alpha_1 = \dfrac{3}{2}$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -\dfrac{1}{2}$. Luînd $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$ formula lui Schwartz-Christoffel ne dă

$$w = C\int_0^z z^{\frac{3}{2}-1}(z-1)^{-1}\,dz + C_1$$

sau

$$w = C\left[2\sqrt{z} + \ln\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right] + C_1.$$

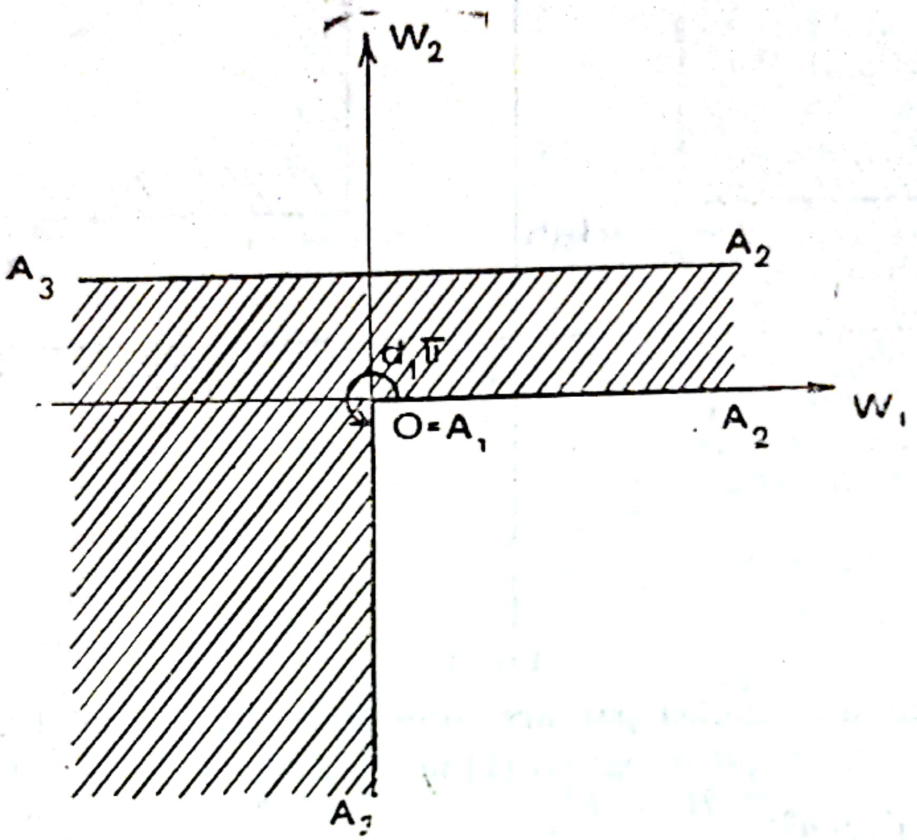


Fig. 3.33.2

Punînd condiţia ca pentru $z = 0$, $w = 0$ obţinem $C_1 = 0$.

Pentru determinarea lui C integrăm pe un semicerc cu centrul în $z = 0$ şi rază $R \to \infty$. Alegem pe (z_1, z_2) determinarea pozitivă a radicalului şi

$$C\int_{\gamma_R}\frac{\sqrt{z}\,dz}{z-1} = \pi i C \xrightarrow[R\to\infty]{} -ih,$$

deci $C = -\dfrac{h}{\pi}$.

$$w = \frac{h}{\pi}\left[-2\sqrt{z} + \ln\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right].$$

3. Luăm $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$ şi avem

$$w = C\int_0^z z^{\frac{5}{4}-1}(z-1)^{-1}\,dz + C_1,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$w = 2C\left[2\sqrt[4]{z} + \ln\frac{1-\sqrt[4]{z}}{1+\sqrt[4]{z}} - 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt[4]{z}\right] + C_1.$$

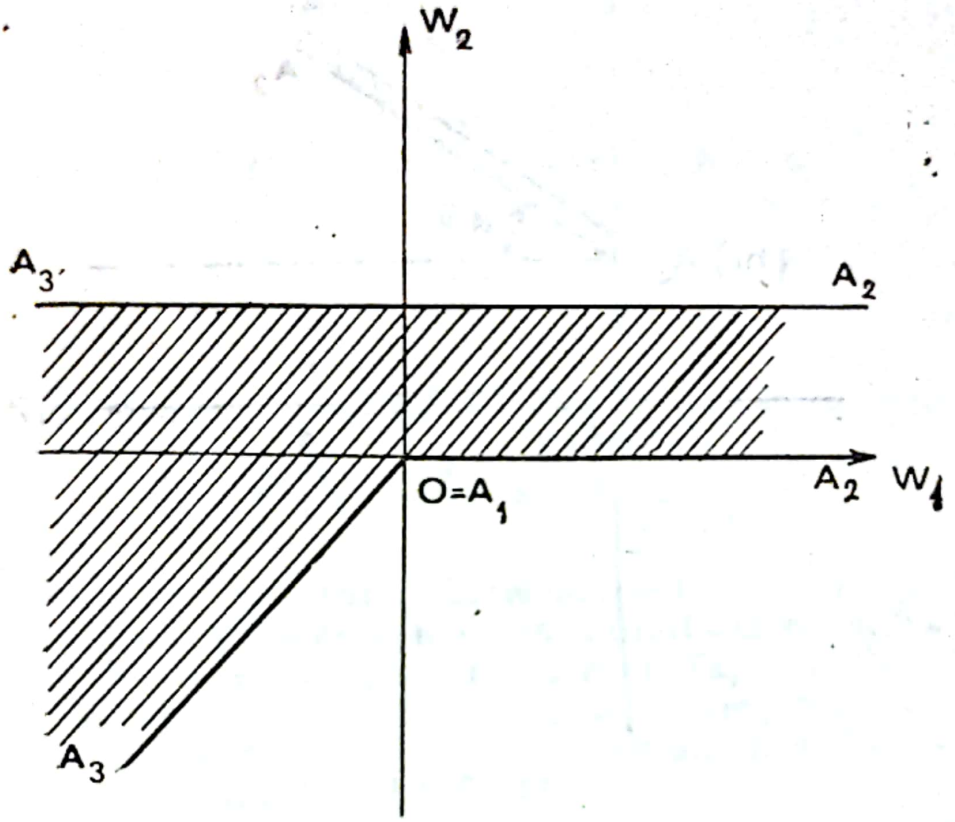


Fig. 3.33.3

Din corespondența punctelor $z_1 = \infty$, $w = 0$ rezultă $C_1 = 0$. Integrînd pe un cerc cu centrul în $z = 0$ și rază $R \to \infty$ și ținînd seama că în planul (w) lățimea benzii este h între A_1A_2 și A_2A_3 rezultă $C = -\frac{h}{\pi}$, deci

$$w = \frac{2h}{\pi}\left(2\operatorname{arc\,tg}\sqrt[4]{z} + \ln\frac{1+\sqrt[4]{z}}{1-\sqrt[4]{z}} - 2\sqrt[4]{z}\right).$$

4. Poligonul este un patrulater de unghiuri $\alpha_1\pi = (\alpha - 2)\pi$, $\alpha_2\pi = 2\pi$, $\alpha_3\pi = -\alpha\pi$, $\alpha_4\pi = 2\pi$. Luăm $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$, $z_4 = -a$ (z_4 aparține seriei axei negative). Avem

$$w = C\int_1^z z^{\alpha-3}(z-1)(z+a)\,dz,$$

sau

$$w = C\left[\frac{1}{\alpha}z^{\alpha} + \frac{a-1}{\alpha-1}z^{\alpha-1} - \frac{a}{\alpha-2}z^{\alpha-2} + \frac{\alpha(1+a)-2}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}\right]. \quad (1)$$

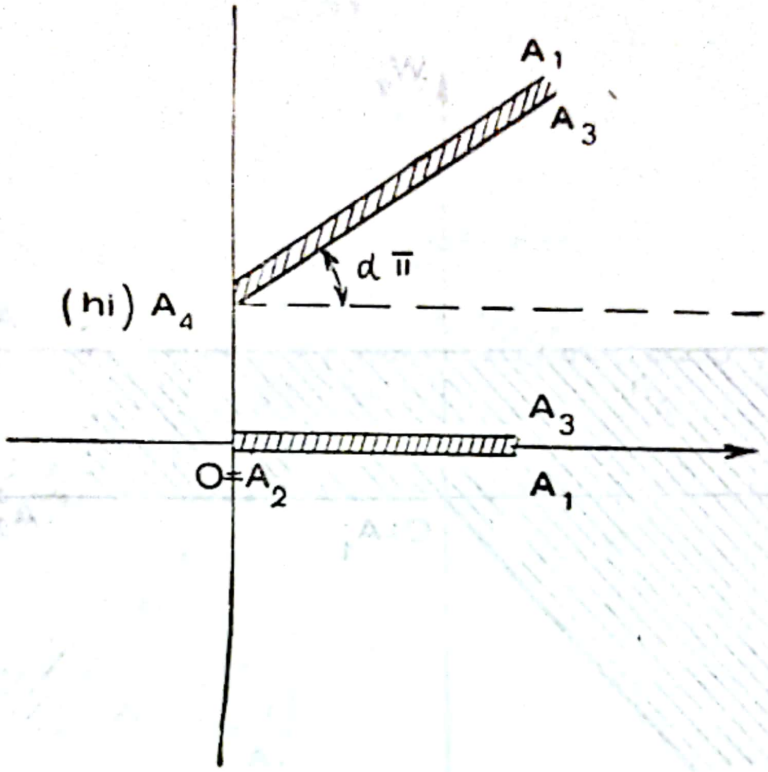


Fig. 3.33.4

Pentru determinarea lui C observăm că A_2A_3 se transformă în semiaxa pozitivă, deci $\arg C = 0$, deci C este o constantă pozitivă. Corespondența punctelor $z = -a$, $w = hi$ ne dă făcînd în (1) substituția $z = ae^{i\pi}$ și $w = hi$ și separînd partea reală și cea imaginară

$$C = \frac{ha^{1-\alpha}\,\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{\sin\pi\alpha.\,[2a-\alpha(1+a)]} \text{ și } a^{\alpha-1}\cos\pi\alpha = \frac{2-\alpha(1+a)}{2a-\alpha(1+a)}.$$

relații ce ne dau constantele a și C.

SERII TRIGONOMETRICE

Numim *serie trigonometrică* o serie de funcţii de forma

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}\,x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}\,x\right), \tag{1}$$

$a_0, a_k, b_k \in R$, x este o variabilă reală, l — un număr real pozitiv.

Dacă seria (1) este convergentă (uniform convergentă sau absolut convergentă) pe un interval $[\alpha, \alpha+\mathrm{T}]$, $T=2l$, atunci ea va fi convergentă (uniform convergentă sau absolut convergentă) pentru toate relaţiile reale ale lui x şi are ca sumă o funcţie periodică de perioadă $2l$.

Dacă şirurile $(a_n)_{n\in N^*}$, $(b_n)_{n\in N^*}$ sînt monotone şi converg la zero, seria este convergentă pentru orice $x\neq 2kl$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ şi uniform convergentă în orice interval compact ce nu conţine puncte de această formă.

Dacă seria converge uniform la $f(x)$ pe $[-l, l]$, atunci

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}\,x\mathrm{d}x, \quad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi}{l}\,x\mathrm{d}x, \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Fie $f: R\to R$ o funcţie periodică de perioadă $T=2l$ pentru care

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}\,x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}\,x\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

putînd fi integrată termen cu termen pe $[-l, l]$, iar a_k și b_k dați de (2). Numerele a_k și b_k se numesc *coeficienții Fourier ai funcției f*, iar seria trigonometrică de perioadă $2l$ formată cu acești coeficienți se numește *seria Fourier asociată funcției f*.

Criteriul 1. (Dirichlet). Dacă funcția f este monotonă pe porțiuni în $[-l, l]$ și are în acest interval un număr finit de puncte de discontinuitate de primă speță, atunci seria Fourier converge în fiecare punct $x_0 \in [-l, l]$ către

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Criteriul 2. Dacă f este derivabilă sau derivabilă pe porțiuni în $[-l, l]$, atunci seria Fourier asociată funcției f converge către $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ în orice $x_0 \in [-l, l]$.

Fie $f(t)$ o funcție reală sau complexă periodică de perioadă T, integrabilă pe $[\alpha, \alpha + T]$. Forma complexă a seriei Fourier asociată funcției f este

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(\tau)e^{-in\omega\tau}\,d\tau. \tag{3}$$

Fie dată o funcție $f(x)$ reală sau complexă care satisface condițiile lui Dirichlet în orice interval de lungime finită, iar în fiecare punct de discontinuitate x_0 ia valoarea $f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$ și este integrabilă pe $(-\infty, \infty)$.

Numim *integrală Fourier* a funcției $f(x)$ egalitatea

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-iu(x-\tau)}\,d\tau. \tag{4}$$

Forma reală a integralei Fourier este

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos u(x - \tau)\,d\tau. \tag{5}$$

Numim *transformata Fourier* a funcției reale sau complexe $f(x) \in \alpha^1(-\infty, +\infty)$ (clasa funcțiilor integrabile pe $(-\infty, +\infty)$), funcția

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t} f(t)\,dt. \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia φ există oricare ar fi α real, deoarece $|e^{i\alpha t}| = 1$. Pentru funcţii pare avem

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos \alpha x \, dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha)\cos \alpha x \, d\alpha,$$

iar pentru funcţii impare

$$\varphi(\alpha) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin \alpha x \, dx, \quad f(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha)\sin \alpha x \, d\alpha.$$

PROBLEME

4.1. Se dă funcţia $f : R \to R$ prin $f(x) = x\cos x$.

1. Să se determine seria Fourier asociată acestei funcţii pe intervalul $[0, \pi]$.

2. Să se determine seria Fourier numai de cosinusuri asociată funcţiei pe $[0, \pi]$.

4.2. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f : R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|, & x \neq 2k\pi \\ 0, & x = 2k\pi, \ k \in Z, \end{cases}$$

pe $R - \{2k\pi.\}$

4.3. Să se dezvolte în serie numai de sinusuri pe intervalul $[0, \pi]$ funcţia $f : [0, \pi] \to R$, dată prin

$$f(x) = e^{ax} \quad (a = \text{const.})$$

4.4. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f : \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] \to R$,

$$f(x) = \sec x.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.5. Fie $f : R \to R$, $f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{x^2}{2}$. Să se dezvolte în serie Fourier pe intervalul $[-\pi, \pi]$.

4.6. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f : [0, 3] \to R$

$$= \begin{cases} x + 1 & , \quad x \in [0, 1] \\ 2(2 - x), & x \in [1, 2] \\ x - 2 & , \quad x \in [2, 3]. \end{cases}$$

4.7. Se consideră funcţia

$$f(x) = \frac{2 \sin x}{5 - 4 \cos x}.$$

Să se dezvolte în serie Fourier pe intervalul $[0, 2\pi]$ şi să se arate că seria obţinută converge uniform pe $[0, 2\pi]$ către această funcţie.

4.8. Să se dezvolte în serie Fourier pe intervalul $[-\pi, \pi]$ funcţiile

$$f(x) = \operatorname{sh} ax, \; g(x) = \operatorname{ch} ax, \qquad (a \neq \text{întreg})$$

şi să se deducă sumele seriilor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + n^2)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2 + n^2)^2}.$$

4.9. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f : R \to R$ definită prin

$$f(x) = \frac{1 - \alpha \cos x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}, \quad |\alpha| < 1, \; \alpha \in R.$$

4.10. Să se determine forma complexă a seriei Fourier pentru funcţiile :

1. $$(x) = \begin{cases} k; & 0 < x < \pi \\ -k, & \pi < x < 2\pi \end{cases}, \quad k = \text{const.}$$

2. $$f(x) = \begin{cases} -x & -\pi < x < 0 \\ 2x & 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

4.11.1. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia periodică de perioadă π, continuă pe R şi a cărei restricţie la intervalul $[0, \pi]$ este $f(x) = \dfrac{x(\pi - x)}{2}$.

2. Să se regăsească rezultatul obţinut cu ajutorul egalităţii lui Parseval — Leapunov pentru funcţia

$$g : [-\pi, \pi] \to \{0, 1\},\ g(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant a \\ 0 & a < |x| < \pi \end{cases} \qquad [5].$$

4.12. Fie funcţia f dezvoltabilă în serie Fourier în $[0, 2\pi]$ avînd coeficienţii $\dfrac{a_0}{2}$, a_n, b_n. Să se demonstreze relaţia (formula lui Poisson):

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n =$$

$$= \frac{1 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)\,d\theta}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2},$$

$r < 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

4.13. Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcţia

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < -a, t > a \\ t, & -a < t < a \end{cases}$$

şi care ia valorile $f(-a) = -\dfrac{a}{2}$, $f(a) = \dfrac{a}{2}$.

Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcţiile următoare:

4.14. $$f(t) = \begin{cases} t^2, & |t| \leqslant \pi \\ 0, & |t| > \pi, \\ \dfrac{\pi^2}{2}, & t = \pm\pi. \end{cases}$$

4.15. $$f(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{2a}, & -a < t < a \\ 0, & t < -a, t > a, \\ \dfrac{3}{4}, & t = -a. \end{cases}$$

4.16.
$$f(t)=\begin{cases}\cos 2t, & |t|\leqslant \pi,\\ 0, & |t|>\pi,\\ \dfrac{1}{2}, & t=\pm\pi.\end{cases}$$

4.17.
$$f(t)=\begin{cases}t, & 0<t<1,\\ 2-t, & 1<t<2,\\ 0, & t<0,\ t>2.\end{cases}$$

4.18. Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcția:
$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1\\ \dfrac{1}{2}, & t=1\\ 0, & t>1.\end{cases}$$

4.19. Să se calculeze transformata Fourier a funcției
$$(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-\dfrac{d}{2},\\ \cos\omega t, & -\dfrac{d}{2}<t<\dfrac{d}{2},\\ 0, & \dfrac{d}{2}<t<+\infty,\end{cases}$$
și să se reprezinte printr-o integrală Fourier

.20. Se consideră funcția
$$f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<0,\\ e^{-at}, & 0<t<\infty,\end{cases}\qquad a>0.$$

Să se calculeze transformata Fourier și apoi să se reprezinte uncția dată printr-o integrală Fourier.

4.21. Să se rezolve ecuația integrală
$$\int_0^\infty \varphi(u)\cos ux\,du=\frac{1}{1+x^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.22. Să se determine funcţia φ dacă

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(u)\sin ux\,du=\begin{cases}\sin x, & |x|\leqslant\pi\\ 0\ , & |x|>\pi.\end{cases}$$

4.23. Să se determine soluţia ecuaţiei integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)e^{iux}\,du=\begin{cases}x^2\ , & |x|<1\\ \dfrac{1}{2}, & x=\pm 1\\ 0\ , & |x|>1.\end{cases}$$

SOLUŢII

4.1. Funcţia f este continuă pe R, este integrabilă pe orice interval compact, deci problema determinării seriei Fourier asociate ei pe un anumit interval are sens.

1. Lungimea intervalului este $2l=\pi$, deci $l=\dfrac{\pi}{2}$. În acest caz formulele generale care ne dau coeficienţii sînt:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos x\cos 2nx\,dx=-\frac{4(4n^2+1)}{\pi(4n^2-1)^2},\quad a_0=\frac{2}{\pi},$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos x\sin 2nx\,dx=\frac{4n}{4n^2-1},\quad n\in N^*.$$

Rezultă că seria Fourier asociată funcţiei f pe intervalul $[0,\pi]$ este

$$\frac{1}{\pi}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4n^2+1}{\pi(4n^2-1)^2}\cos 2nx+\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Pentru determinarea coeficienților Fourier ai serie, numai de cosinusuri asociată funcției f pe $[0, \pi]$ avem $l = \pi$ i $b_n = 0$ și

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x[\cos(n+1)x + \cos(n-1)x]\, dx = (-1)^{n-1}\frac{2(n^2+1)}{(n^2-1)^2}, \quad a_1 = \pi,$$

deci seria cerută este

$$\frac{2}{\pi} + \pi\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2+1}{(n^2-1)^2}\cos nx.$$

4.2. Funcția f este o funcție periodică de perioadă 2π și pară, deci este suficient să studiem problema numai pe $[0, \pi]$. Funcția este nemărginită pe acest interval, deci va trebui să arătăm că este absolut integrabilă în sens propriu pe $[0, \pi]$. Dar f este integrabilă Riemann pe orice interval $[x, \pi] \subset [0, \pi]$ deoarece este continuă. Apoi

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\,|f(x)| = -\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln \sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}} = 0,$$

deci în baza criteriului comparației rezultă că f este absolut integrabilă pe $[0, \pi]$, deci putem determina coeficienții Fourier. Funcția f verifică condițiile din criteriul lui Lipschitz, deci seria Fourier asociată converge în x_0 către $f(x_0)$, unde $x_0 \in [0, \pi]$, arbitrar, deci f este dezvoltabilă în seria Fourier pe $R - \{x \in R \mid x = 2k\pi\}$:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx\right] = -\frac{1}{n},$$

deci

$$f(x) = \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

Înlocuind aici $x = \pi$ obţinem

$$a_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = -\ln 2,$$

deci

$$f(x) = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

4.3. $a_0 = 0$, $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ax} \sin nx \, dx = \frac{2n[1 - (-1)^n e^{a\pi}}{\pi(a^2 + n^2)},$$

deci pentru $x \in [0, \pi]$

$$e^{ax} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n e^{a\pi}] \frac{n \sin nx}{a^2 + n^2}.$$

4.4. Funcţia $f(x)$ verifică condiţiile din corolarul criteriului lui Dirichlet — Jordan pe $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$; este o funcţie pară.

$$a_0 = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \frac{8}{\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t^2} dt = \frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2}).$$

$$a_n = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \cos 4nx \, dx = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \frac{\cos 4nx}{\cos x} dx =$$

$$= \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \left[2\cos(4n-1)x - 2\cos(4n-3)x + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos 4(n-1)x}{\cos x}\right] dx =$$

$$= \frac{16}{\pi}\left[\frac{\sin(4n-1)\frac{\pi}{4}}{4n-1} - \frac{\sin(4n-3)\frac{\pi}{4}}{4n-3}\right] + a_{n-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scriind toate relaţiile pentru $n = 1, 2, \ldots, n$ şi adunîndu-le obţinem

$$a_n = \frac{16}{\pi} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \sin(2k+1)\frac{\pi}{4} + \frac{8}{\pi} \ln(1+\sqrt{2}),$$

deci

$$\sec x = \frac{4}{\pi} \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln(1+\sqrt{2}) + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \sin(2k+1)\frac{\pi}{4} \right] \cos 4nx.$$

4.5. Funcţia este pară, satisface condiţiile criteriului lui Dirichlet, deci poate fi dezvoltată în serie Fourier pe $[-\pi, \pi]$.

Avem $a_0 = 0$, $b_n = 0$ şi

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{x^2}{2} \right) \cos nx \, dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Dar $f''(x) = -1$, deci $|f''(x)| < k$, unde $k = 1$ şi $|a_n| < \frac{2}{n^2}$ pe $[-\pi, \pi]$, deci seria este absolut şi uniform convergentă pe acest interval, iar suma ei este $f(x)$, deci

$$f(x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx.$$

4.6. Funcţia dată este continuă pe $[0, 3]$ şi $f(0) = f(3) = 1$.

Funcţia este monotonă pe $[0, 1]$, $[1, 2]$ şi $[2, 3]$, deci este cu variaţie mărginită pe aceste intervale, deci şi pe $[0, 3]$, deci este dezvoltabilă în serie Fourier uniform convergentă pe acest interval.

$$a_0 = \frac{2}{3} \int_0^3 f(x)\,dx = \frac{2}{3} \left[\int_0^1 (x+1)\,dx + \int_1^2 2(2-x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_2^3 (x-2)\,dx \right] = 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{2n\pi}{3}x\,dx = \frac{2}{3}\left[\int_0^1 (x+1)\cos\frac{2n\pi}{3}x\,dx + \right.$$

$$\left. + 2\int_1^2 (2-x)\cos\frac{2n\pi}{3}x dx + \int_2^3 (x-2)\cos\frac{2n\pi}{3}\,x dx\right] =$$

$$= 4\sin n\pi \sin\frac{n\pi}{3} = 0.$$

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\frac{2n\pi}{3}x\,dx = (-1)^{n+1}\frac{9\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2\pi^2}.$$

$b_n = 0$, dacă $n = k\pi$, $k \in Z$.

$$f(x) = 2 + \frac{9}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}x.$$

4.7. Funcţia satisface toate condiţiile pentru a putea fi dezvoltată în serie Fourier pe intervalul dat.

Avem

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{5-4\cos x}\,dx = 0.$$

Pentru calcularea celorlalţi coeficienţi vom calcula $a_n + ib_n$ cu ajutorul teoremei reziduurilor:

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{5-4\cos x}\,e^{inx}dx,$$

cu transformarea $e^{ix} = z$ obţinem

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{|z|=1}\frac{z^{n-1}(z^2-1)}{2z^2-5z+2}\,dz = 2i\,(R_0 + R_{\frac{1}{2}}),$$

dar

$$R_0 = 0,\quad R_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n+1}},$$

deci

$a_n + ib_n = \dfrac{i}{2^n}$, de unde $a_n = 0$, $b_n = \dfrac{1}{2^n}$ şi $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$.

$f(x)$ este continuă pe $[0, 2\pi]$, deci seria ei Fourier converge uniform către $f(x)$ pe $[0, 2\pi]$.

Scanned with OKEN Scanner

4.8. Funcţiile date îndeplinesc condiţiile lui Dirichlet.
Pentru $f(x)$ avem $a_0 = 0$, $a_n = 0$ (f este funcţie impară) şi :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sh} ax \sin nx \, dx.$$

Integrînd de două ori prin părţi, obţinem

$$b_n = \frac{2}{\pi(a^2 + n^2)}[a \sin nx \operatorname{ch} ax - n \cos nx \operatorname{sh} x]_0^{\pi} =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{2n}{\pi(a^2 + n^2)} \operatorname{sh} a\pi,$$

deci

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} ax \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{a^2 + n^2} \sin nx, \quad |x| < \pi. \qquad (1)$$

Pentru $g(x)$ avem $b_n = 0$ şi (g este o funcţie pară).

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{ch} ax \, dx = \frac{\operatorname{sh} a\pi}{a\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{ch} ax \cdot \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{ch} ax \frac{\operatorname{sn} nx}{n}\right]_0^{\pi} -$$

$$- \frac{2a}{n\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sh} ax \sin nx \, dx = (-1)^n \frac{2a \operatorname{sh} a\pi}{\pi(a^2 + n^2)},$$

deci

$$g(x) = \frac{\operatorname{sh} a\pi}{a\pi} + \frac{2a \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{a^2 + n^2}, \quad |x| \leqslant \pi. \qquad (2)$$

Utilizînd formula lui Parseval

$$a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l}\int_l f^2(x) \, dx,$$

unde $f : [-l, l] \to R$ şi pătratul ei este o funcţie integrabilă şi ţinînd seama de relaţiile (1) şi (2), obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2 + n^2)^2} = \frac{\pi}{2\operatorname{sh}^2 a\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sh}^2 ax \, dx$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$\frac{1}{4a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{(a^2+n^2)^2}=\frac{\pi}{2s\,h^2a\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{ch}^2\,ax\,\mathrm{d}x.$$

Calculînd integralele din membrii doi, avem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(a^2+n^2)^2}=\frac{\pi}{8a\,\mathrm{sh}^2a\pi}[\mathrm{sh}\,2a\pi-2a\pi], \tag{1'}$$

$$\frac{1}{4a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{(a^2+n^2)^2}=\frac{\pi}{8a\,\mathrm{sh}^2\,a\pi}[\mathrm{sh}\,2a\pi+2a\pi]. \tag{2'}$$

Din (2') obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a^2+n^2)^2}=\frac{\pi a-1}{4a^4}+\frac{\pi[(2a\pi+1)e^{2a\pi}-1]}{2a^3(e^{2a\pi}-1)^2}. \tag{3}$$

Aplicînd de trei ori regula lui l'Hospital, obţinem

$$\lim_{a\to 0}\left\{\frac{\pi}{8a\mathrm{sh}^2\,a\pi}[\mathrm{sh}\,2a\pi-2a\pi]\right\}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Ţinînd seama că seria din membrul întîi al egalităţii (1') este absolut convergentă, rezultă că putem trece la limită pentru $a\to 0$ sub semnul sumă, astfel că din (1') deducem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

4.9. Funcţia $f(x)$ este periodică de perioadă 2π derivabilă şi cu derivata continuă pe R, deci este dezvoltabilă în serie Fo rier pe R. Funcţia $f(x)$ este pară, deci $b_n=0$. Avem

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\alpha\cos x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\,\mathrm{d}x.$$

Cu schimbarea $e^{ix}=z$, intervalul $[0,2\pi]$ se transformă în cercul $|z|=1$, deci

$$a_0=\frac{1}{4\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\alpha z^2-2z+\alpha}{\alpha z^2-z(1+\alpha^2)+\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia $F(z)=\dfrac{\alpha z^2-2z+\alpha}{z(\alpha z^2-z(1+\alpha^2)+\alpha)}$ are în interiorul domeniului $|z|=1$ punctele singulare $z=0$ şi $z=\alpha$, $(|\alpha|<1)$, ca poli simpli. Rezultă

$$a_0=\frac{1}{4\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\alpha z^2-2z+\alpha}{z[\alpha z^2-z(1+\alpha^2)+\alpha]}\,dz=\frac{1}{2}(R_0+R_\alpha),$$

unde

$$R_0=\left.\frac{\alpha z^2-2z+\alpha}{\alpha z^2-z(1+\alpha^2)+\alpha}\right|_{z=0}=1,\quad R_\alpha=\left.\frac{\alpha z^2-2z+\alpha}{\alpha z\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)}\right|_{z=\alpha}=1,$$

şi

$$a_0=1.$$

$$a_n+ib_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{1-\alpha\cos x}{1-2\cos x+\alpha^2}e^{inx}\,dx.$$

Făcînd schimbarea $e^{ix}=z$ obţinem

$$a_n+ib_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(\alpha z^2-2z+\alpha)z^{n-1}}{\alpha z^2-z(1+\alpha^2)+\alpha}\,dz=R_\alpha,$$

unde

$$R_\alpha=\left.\frac{(\alpha z^2-2z+\alpha)z^{n-1}}{\alpha\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)}\right|_{z=\alpha}=\alpha^n.$$

Rezultă $a_n+ib_n=\alpha^n$, deci $a^n=\alpha_n$, $b_n=0$ şi

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\cos nx,\qquad x\in R.$$

4.10. Forma complexă a seriei Fourier este

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{in\frac{\pi}{l}x},\quad c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t|\,e^{-in\frac{\pi}{l}t}\,dt.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{k}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{-inx}\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-inx}\,dx\right] =$$

$$= \frac{k(1-e^{-in\pi})}{n\pi i},\ c_0 = 0,\ \text{și } c_n = 0 \text{ pentru } n \text{ par},$$

iar pentru n impar $c_n = \frac{2k}{n\pi i}$, deci

$$f(x) = \frac{2k}{\pi i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{n}.$$

2.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} xe^{-inx}\,dx + 2\int_0^{\pi} xe^{-inx}\,dx\right] =$$

$$= \frac{3}{2n^2\pi}\left[(-1)^n(1+in\pi) - 1\right],$$

și

$$f(x) = \frac{3}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n(1+in\pi)-1}{n^2}e^{inx}.$$

4.11. Funcția dată este pară. Avem $T = \pi$, $\omega = 2$ și

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)dx = \frac{\pi^2}{12}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\pi - x)\cos 2nx\,dx = -\frac{1}{2n^2}.$$

deci

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2},$$

sau înlocuind $\cos 2nx$ cu $1 - 2\sin^2 nx$ și ținînd seama că $\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ avem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{n^2}. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Funcţia g este integrabilă pe $[-\pi, \pi]$, deci coeficienţii Fourier ai ei verifică egalitatea

$$\frac{a_0'^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n'^2 + b_n'^2) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g^2(x)\mathrm{d}x, \; l = \pi.$$

Funcţia fiind pară $b_n' = 0$,

$$a_0' = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{a} \mathrm{d}x = \frac{2a}{\pi},$$

$$a_n' = \frac{2}{\pi}\int_0^{a} \cos nx\mathrm{d}x = \frac{2\sin na}{n\pi}$$

şi

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{a} \mathrm{d}x = 2a,$$

egalitatea lui Parseval — Leapunov corespunzătoare este

$$\frac{2a^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} = \frac{2a}{\pi}.$$

De aici pentru $x \in [0, \pi]$ se deduce (1).

4.12. Fie $F(\varphi, r) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)\, r^n$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ sau ţinînd seama de expresiile coeficienţilor seriei Fourier

$$F(\varphi, r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - \varphi)\right]\mathrm{d}\theta.$$

Pentru a calcula suma seriei de sub semnul integralei observăm că seria geometrică

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n\,[\cos n(\theta - \varphi) + i \sin n(\theta - \varphi)] = \sum_{n=1}^{\infty} r^n\, e^{in(\theta-\varphi)}$$

este convergentă pentru $r < 1$ şi are suma

$$\frac{r\, e^{i(\theta-\varphi)}}{1 - r\, e^{i(\theta-\varphi)}} = \frac{r[\cos(\theta - \varphi) - r + i\sin(\theta - \varphi)]}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\sum r^n \cos n(\theta - \varphi) = \frac{r[\cos(\theta - \varphi) - r]}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2},$$

de unde

$$F(\varphi, r) = \frac{1 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)\,d\theta}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2},$$

4.13. Funcţia este impară. Avem

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos ut\,du \int_0^{\infty} f(\tau)\cos u\tau\,d\tau,$$

iar

$$\int_0^{\infty} f(\tau)\cos u\tau\,d\tau = \int_0^{a} \tau\cos u\tau\,d\tau = \frac{a\sin au}{u} + \frac{\cos au - 1}{u^2},$$

deci

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{a\sin au}{u} + \frac{\cos au - 1}{u^2}\right)\cos ut\,du.$$

4.14. Funcţia este pară, deci

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos ut\,du \int_0^{\pi} \tau^2\cos u\tau\,d\tau,$$

dar

$$\int_0^{\pi} \tau^2\cos u\tau\,d\tau = \frac{2\pi\cos u\pi}{u^2},$$

deci

$$f(t) = 4\int_0^{\infty} \frac{\cos u\pi\cos ut}{u^2}\,du.$$

4.15.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{+iu(t-\tau)}\,d\tau$$

şi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{iu(t-\tau)}\,d\tau = \int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{\tau}{2a}\right)e^{iu(t-\tau)}\,d\tau = \left(1 + \frac{i}{au}\right)\frac{e^{iut}\sin au}{u},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1 + \frac{i}{au}\right)\frac{\sin au}{u}\, e^{iut}\,du.$$

4.16. Funcţia este pară, deci

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos ut\,du\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2\tau\cos u\tau\,d\tau =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{u\sin u\pi\cos ut}{u^2-4}\,du.$$

4.17.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iut}\,du\left[\int_0^1 \tau e^{-iu\tau}\,d\tau + \int_1^2 (2-\tau)e^{-iu\tau}\,d\tau\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iu} - e^{-2iu}}{u^2}\,e^{iut}\,du.$$

4.18. Avem

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos ux\,du\int_0^{\infty}f(t)\cos ut\,dt = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)],$$

dar

$$\frac{f(1-0)+f(1+0)}{2} = \frac{1}{2},$$

deci

$$\int_0^{\infty}f(t)\cos ut\,dt = \int_0^1\cos ut\,dt = \frac{\sin u}{u},$$

de unde

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos ut\sin u}{u}\,du = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < 1 \\ \frac{1}{2}, & t = 1 \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Acesta este factorul de discontinuitate a lui Dirichlet.

Scanned with OKEN Scanner

4.19. Funcţia este pară (fig.4.19.1), deci

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt.$$

Avem

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \cos \omega t \cos \alpha t \, dt =$$

$$= d \left[\frac{\sin(\omega - \alpha)\frac{d}{2}}{(\omega - \alpha)\frac{d}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(\omega + \alpha)\frac{d}{2}}{(\omega + \alpha)\frac{d}{2}} \right].$$

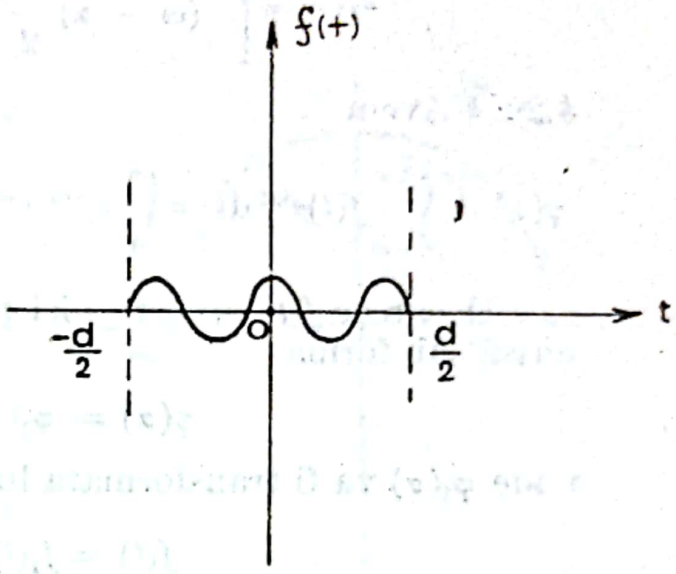


Fig. 4.19.1

Graficul funcţiei este fig. 4.19.2.

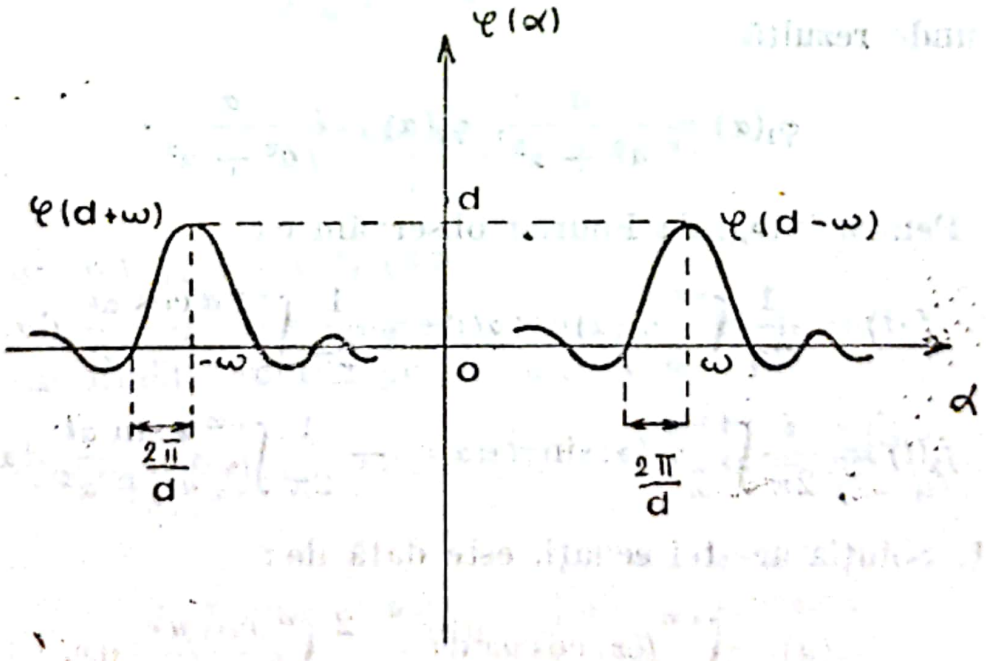


Fig. 4.19.2

Scanned with OKEN Scanner

Integrala Fourier va fi

$$f(t) = \frac{d}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin(\omega-\alpha)\frac{d}{2}}{(\omega-\alpha)\frac{d}{2}} + \frac{\sin(\omega+\alpha)\frac{d}{2}}{(\omega+\alpha)\frac{d}{2}}\right]e^{-i\alpha t}\,d\alpha.$$

4.20. Avem

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\alpha t}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-at}\,e^{i\alpha t}\,dt = \frac{e^{-(a-i\alpha)t}}{-(a-i\alpha)}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{a-i\alpha}.$$

Deoarece $f(t)$ nu este nici pară, nici impară, $\varphi(\alpha)$ poate fi scrisă sub forma

$$\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha),$$

unde $\varphi_1(\alpha)$ va fi transformata lui $f_1(t)$ și $\varphi_2(\alpha)$ a lui $f_2(t)$, iar

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t),$$

unde $f_1(t)$ este o funcție pară, iar $f_2(t)$ o funcție impară.

Deci

$$\varphi(\alpha) = \frac{a+i\alpha}{a^2+\alpha^2} = \frac{a}{\alpha^2+a^2} + i\frac{\alpha}{a^2+\alpha^2},$$

de unde rezultă

$$\varphi_1(\alpha) = \frac{a}{a^2+\alpha^2},\quad \varphi_2(\alpha) = i\frac{\alpha}{a^2+\alpha^2}.$$

Pentru integrala Fourier observăm că

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(\alpha)\cos\alpha t\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\cos\alpha t}{a^2+\alpha^2}\,d\alpha,$$

$$f_2(t) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(\alpha)\sin\alpha t\,d\alpha = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\sin\alpha t}{a^2+\alpha^2}\,d\alpha.$$

4.21. Soluția acestei ecuații este dată de:

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ux\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos ux}{1+x^2}\,dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm funcţia $f(z) = \dfrac{e^{iuz}}{1+z^2}$ şi $\displaystyle\int_c \frac{e^{iuz}}{1+z^2}\,dz$, unde (C) este conturul din fig. 4.21.

Funcţia $f(z)$ are în interiorul conturului (C) polul simplu $z = i$, deci

$$\int_C \frac{e^{iuz}}{1+z^2}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{iux}}{1+x^2}\,dx +$$

$$+ \int_\gamma \frac{e^{iuz}}{1+z^2}\,dz = 2\pi i R_i, \qquad (1)$$

unde

$$R_i = \left.\frac{e^{iuz}}{z+1}\right|_{z=i} = \frac{e^{-u}}{2i}.$$

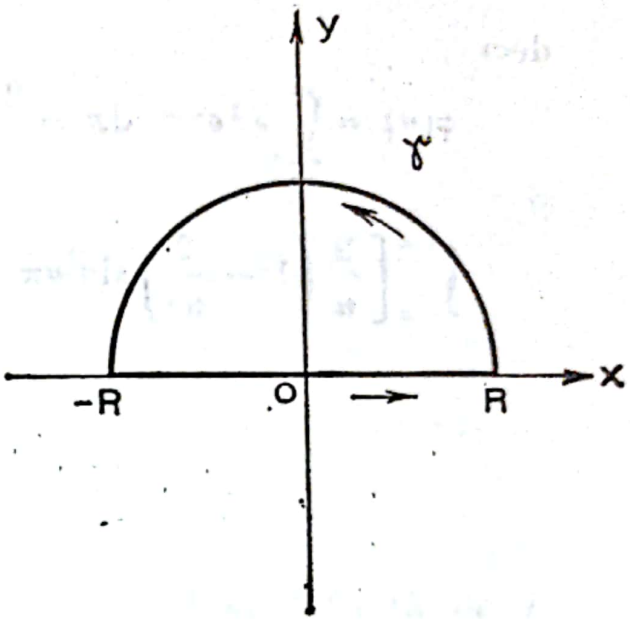


Fig. 4.21

Trecînd la limită în relaţia (1) pentru $R \to \infty$ şi ţinînd seama că $\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iuz}}{1+z^2}\,dz = 0$, (verificarea este imediată) obţinem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-u}$$

şi

$$2\int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-u}.$$

Rezultă $\varphi(u) = e^{-u}$, $(u \geqslant 0)$.

4.22. Pentru determinarea funcţiei φ aplicăm formula care ne dă transformata Fourier prin sinus. Avem

$$\varphi(u) = \int_0^{\infty} f(x)\sin ux\,dx = \int_0^{\pi} \sin x \sin ux\,dx = \frac{\sin u}{1-u^2},$$

deci

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin u \sin ux}{1-u^2}\,du = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}.$$

4.23. $\varphi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-iux}\,\mathrm{d}x$, unde $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x|<1 \\ \frac{1}{2}; & x = \pm 1 \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$

deci

$$\varphi(u) = \int_{-1}^{1} x^2 e^{-iux}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sin u\pi}{u}\left(1 - \frac{2}{u^2}\right) + \frac{4}{u^2}\cos u\pi$$

și

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{2}{u}\left(1 - \frac{2}{u^2}\right)\sin u\pi + \frac{4}{u^2}\cos u\pi\right]e^{iux}\,\mathrm{d}u = f(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

ECUAȚII DIFERENȚIALE

Fie $F : [a, b] \times Y \to R$, $Y \subset R^{n+1}$.

Numim *ecuație diferențială de ordinul n*, definită de F problema găsirii tuturor funcțiilor y definite pe intervale I_y incluse în $[a, b]$ și cu valori reale, derivabile pînă la ordinul n și care satisfac egalitatea

$$F[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)] = 0, \quad (\forall)\ x \in I_y.$$

O asemenea problemă se notează pe scurt astfel :

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Funcțiile $y = f(x)$ care satisfac condițiile de mai sus se numesc *soluții ale ecuației* (1).

Graficul unei soluții este o curbă în plan, numită *curbă integrală.*

Ecuații diferențiale de ordinul întîi :

Funcția $\varphi(x, C)$ se zice că este *soluția generală* a ecuației $F(x, y, y') = 0$ dacă pentru orice C fixat funcția $\varphi_c(x) = \varphi(x, C)$ este soluție pentru ecuație și dacă pentru orice soluție y a ecuației există C_y astfel ca $\varphi(x, C_y) = y(x)$, $(\forall)\ x \in I_y$.

Teorema de existență. Fie ecuația diferențială $y' = f(x, y)$; $f : \Delta \to R^1$, $\Delta = \{(x, y) : |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$.

Dacă :

1°. f este continuă pe Δ,

2°. f sste Lipschitziană în raport cu y pe Δ, adică există $A > 0$ astfel ca pentru orice $(x, y_1), (x, y_2) \in \Delta$ să avem

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < A|y_1 - y_2|$$

atunci

1°. există $0 < h \leqslant a$ și o funcție $\varphi : (x_0 - h, x_0 + h) \to R$ derivabilă și cu proprietatea

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x));$$

2° funcția φ are în plus proprietatea că $\varphi(x_0) = y_0$.

Problema determinării soluției ecuației $y' = f(x, y)$ care pentru $x = x_0$ ia valoarea $y = y_0$, $(y = \varphi(x))$ al cărei grafic trece prin punctul (x_0, y_0) se numește *problema lui Cauchy*, iar condiția ca pentru $x = x_0$, $\varphi(x_0) = y_0$ se numește *condiție inițială*.

1. Ecuația care provine din anularea unei diferențiale totale : $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ unde $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ sînt funcții continue cu derivate parțiale continue în $D \subset R^2$ și

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Soluția generală este dată de

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,\mathrm{d}t = C, \quad (x_0, y_0) \in D, \quad C = \text{const.}$$

Dacă $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ nu este diferențială totală în D se poate uneori determina o funcție $\mu(x, y)$ definită în D și cu derivate parțiale de ordin I continue în D așa încît expresia $\mu(x, y)\,[P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y]$ să fie diferențială totală în D. Deci

$$\frac{\partial}{yx}(\mu Q) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu P).$$

Funcția $\mu(x, y)$ se numește *factor integrant* al ecuației date.

2. Ecuații cu variabile separate : $P(x)\mathrm{d}x + Q(y)\,\mathrm{d}y = 0$ cu $P(x)$ continuă pe $[a, b]$ și $Q(y)$ continuă pe $[c, d]$ și $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ pentru orice $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. Soluția generală este dată de

$$\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(t)\,\mathrm{d}t = C, \quad (C = \text{const.})$$

cu (x_0, y_0) și $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$.

Scanned with OKEN Scanner

3. **Ecuații omogene :** $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ $\left(\text{sau } y' = f\left(\frac{y}{x}\right)\right)$ unde P și Q sînt funcții omogene în sens Euler în x și y de același grad. Prin schimbarea de funcție $y(x) = xz(x)$ se transformă într-o ecuație cu variabile separate.

4. **Ecuațiile de forma** $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$, sînt reductibile la ecuații omogene.

a) dacă $c = c_1 = 0$ avem o ecuație omogenă de tip 3.

b) dacă $c^2 + c_1^2 \neq 0$, $ab_1 - a_1b \neq 0$ dreptele (d_1): $ax + by + c = 0$, (d_2): $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ se intersectează în punctul (x_0, y_0); cu schimbarea de variabilă $u = x - x_0$, $v = y - y_0$ ecuația se reduce la tipul a).

c) dacă $c^2 + c_1^2 \neq 0$, $ab_1 - a_1b = 0$ dreptele (d_1) și (d_2) sînt paralele. Se face schimbarea de funcție $ax + by = z(x)$ și variabilele se separă.

5. **Ecuații liniare :** $y' + P(x)y + Q(x) = 0$ cu P și Q continue pe $[a, b]$. Soluția generală este dată de

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[K - \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx\right], \quad x \in [a, b], \; K = \text{const.}$$

Ecuații reductibile la ecuații liniare :

6. **Ecuația Bernoulli :** $y' + P(x)y + Q(x)y^\alpha = 0$, α real $\neq 0, 1$.

Prin schimbarea de funcție $y^{1-\alpha}(x) = z(x)$ ecuația se transformă într-o ecuație liniară.

7. **Ecuația Riccati :** $y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$ cu P, Q și R continue pe $[a, b]$. În general, această ecuație nu poate fi integrată prin cuadraturi. Dacă se cunoaște o integrală particulară y_1 a ei, prin schimbarea de funcție $y = y_1 + \frac{1}{z}$ ecuația se transformă într-o ecuație liniară.

8. **Ecuații algebrice în** y' :

$$A_0(x,y)(y')^n + A_1(x,y)(y')^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x,y)y' + A_n(x,y) = 0, \tag{2}$$

cu $A_k(a, y)$ funcții continue în $D \subset R^2$ și $A_0(x, y) \neq 0$ în D.

Fiecare rădăcină reală (considerată (2) ecuație algebrică) ne dă o ecuație de forma $y' = f(x, y)$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuații diferențiale de ordinul întîi nerezolvate în raport cu y'.

9. **Ecuația** $y = f(y')$, f este o funcție cu derivată continuă în $[a, b]$. Soluția generală este dată sub formă parametrică de

$$\begin{cases} y = f(p) \\ x = \int \frac{1}{p} f'(p)\,dp + C, \ C = \text{const.} \end{cases}$$

10. **Ecuația** $F(y, y') = 0$. Cunoscînd o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0 : u = \varphi(t), \ v = \psi(t), \ t \in [a, b]$ soluția generală este dată parametric de

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C, \ C = \text{const.} \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

și este definită pe orice interval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ pe care $\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt$ are sens.

11. **Ecuația** $x = f(y')$, cu f funcție cu derivată continuă în $[a, b]$.

Soluția generală este dată sub formă parametrică de

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int p f'(p)\,dp + C, \ p \in [a, b], \ C = \text{const.} \end{cases}$$

12. **Ecuația Lagrange :** $A(y')x + B(y')y + C(y') = 0$ cu A, B, C funcții continue cu derivate de ordinul întîi continue pe $[a, b]$. (sau $y = \varphi(y')x + \psi(y')$. Se notează $y' = p$ apoi se diferențiază ținînd seama de relația $dy = p\,dx$ și se obține o ecuație în care considerînd x ca funcție de p este liniară, de unde

$$x = e^{-\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}\left[C - \int \frac{\psi'(p)}{\varphi(p)-p} e^{\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}\,dp\right], \ C = \text{const.}$$

Dacă $\varphi(p) - p = 0$ și $\lim_{p \to p_k} |x| = +\infty$, unde $p = p_k$ este o soluție a ecuației $\varphi(p) = p$ dreapta $y = \varphi(p_k)x + \psi(p_k)$ este o *direcție asimptotică* a *curbelor integrale* reprezentate de integrala generală.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\varphi(p) - p = 0$ și $\lim_{p \to p_k} x = x_0$ (finit) dreapta $y = \varphi(p_k) + \psi(p_k)$ este o *soluție singulară* a ecuației Lagrange.

13. **Ecuația Clairaut** : $y = xy' + \psi(y')$, unde ψ are derivata continuă în $[a, b]$. Ecuația este caz particular al ecuației Lagrange,

14. **Ecuația** $y = f(x, y')$. Se notează $y' = p$: $y = f(x, p)$, de unde prin derivare obținem ecuația rezolvată în raport cu $\frac{dp}{dx}$: $p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$ a cărei soluție generală este $p = \varphi(x, C)$ și soluția generală a ecuației date va fi deci $y = f[x, \varphi(x, C)]$, $C = \text{const}$.

Traiectorii izogonale. Fie (Γ) și (Γ') două familii de curbe definite în $D \subset R^2$ așa încît prin fiecare punct al domeniului trece o singură curbă din fiecare familie. *Familia de curbe* (Γ') *este izogonală familiei* (Γ) în D, dacă în fiecare punct din D cele două curbe ale familiilor ce trec prin el se taie sub unghi constant θ. Familia (Γ') este definită de ecuația diferențială

$$f\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0, \quad (x, y) \in D,$$

unde $(\Gamma) : f(x, y, y') = 0$, $(x, y) \in D$ și $\operatorname{tg} \theta = k$.

Dacă $\theta = \frac{\pi}{2}$ familiile se *numesc ortogonale*

Ecuații de ordin superior

1. $F(x, y^{(n)}) = 0$. Cunoscînd o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0$; $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$ cu φ și ψ continue și φ cu derivată continuă pe $[a, b]$, atunci $x = \varphi(t)$.

$$y^{(n)} = \psi(t) \text{ sau } d(y^{(n-1)}) = y^{(n)}\,dx = \psi(t)\,\varphi'(t),$$

deci $y^{(n-1)} = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C_0, \ldots$ Integrarea se poate repeta de n ori și se obține $y(t)$.

2. $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$, cunoscînd o reprezentarea parametrică a curbei $F(u, v) = 0$ soluția generală se obține prin n cuadraturi. Analog pentru ecuația $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$.

3. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$. Prin schimbarea de funcție $y^{(k)} = u$ se transformă într-o ecuație diferențială de ordin $n - k$.

4. $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$. Notînd $y' = p$ îi reducem ordinul cu o unitate.

Scanned with OKEN Scanner

5. $F(y, xy', x^2y'', \ldots, x^n y^{(n)}) = 0$. Prin schimbarea de variabilă $x = e^t$ i se reduce ordinul cu o unitate.

6. **Ecuaţia liniară :** $a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = f(x)$.

Dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt n soluţii independente ale ecuaţiei omogene atunci soluţia generală a ecuaţiei este

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k\, y_k, \quad C_k = \text{const.}$$

7. **Ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi :**

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = F(x), \quad a_k = \text{const.}, \; k = 0, \ldots n.$$

Pentru ecuaţia omogenă ($F = 0$) se consideră o soluţie de forma $y = e^{rx}$ şi se obţine pentru r ecuaţia caracteristică.

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

a) Dacă ecuaţia caracteristică are rădăcini distincte, simple $r_1, r_2, \ldots, r_n$, atunci funcţiile $y_k = e^{r_k x}$, $(k = 1, \ldots, x)$ formează un *sistem fundamental de soluţii* pentru ecuaţia omogenă, iar soluţia ei generală este

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k\, y_k. \quad (C_k = \text{const.}).$$

b) Dacă ecuaţia caracteristică are rădăcini complexe simple

$$r_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m\,; \quad n = 2m,$$

$$\bar{r}_k = \alpha_k - i\beta_k,$$

atunci funcţiile $y_k = e^{\alpha_k r}\cos(\beta_k x)$, $\bar{y}_k = e^{\alpha_k r}\sin(\beta_k x)$ formează un sistem fundamental de soluţii a ecuaţiei omogene.

c) Dacă ecuaţia caracteristică are rădăcini multiple : $r = \alpha$ e multiplă de ordin $p + 1$, atunci funcţia

$$y = C_0 e^{\alpha x} + C_1 x\, e^{\alpha x} + \ldots + C_p x^p\, e^{\alpha x}, \quad x \in R$$

este o soluţie a ecuaţiei omogene.

Pentru determinarea unei soluţii particulare y_p ecuaţiei neomogene avem trei procedee :

1 — metoda coeficienţilor nedeterminaţi,

2 — metoda funcţiilor nedeterminate,

3 — metoda variaţiei constantelor.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene va fi $y = y_0 + y_p$, unde y_0 este soluţia generală a ecuaţiei omogene.

Ecuaţia Euler: $a_0 \cdot x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = F(x)$.

Schimbarea de variabilă $x = e^t$ o transformă într-o ecuaţie cu coeficienţi constanţi.

Considerînd o soluţie de forma $y = x^r$ se obţine o ecuaţie caracteristică şi lucrurile decurg mai departe ca la ecuaţii cu coeficienţi constanţi, numai că, în acest caz, în cazurile rădăcinilor multiple înmulţim cu $\ln x$ în loc de x.

PROBLEME

5.1. Să se determine soluţiile generale ale ecuaţiilor:

1. $x^2(y-1)\,y' + (x-1)\,y = 0$.
2. $x(2x^3-1)\,y' - 2(x^3-1)\,y = 0$.
3. $\sqrt{y^2-1}\;\; y' - \sqrt{x^2-1} = 0,\ |x| = 1,\ |y| < 1$.
4. $(1+x^2)\,y' = xy(1+y^2)$.
5. $y' - ax^n(1+y^2) = 0,\ a = \text{const}$.

5.2. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$y' \sin x = y \ln y,\ y > 0$$

şi curba integrală care trece prin punctul $P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

5.3. Să se determine soluţiile generale a următoarelor ecuaţii diferenţiale:

1. $xy' + ay^2 - y + bx^2 = 0,\ a, b = \text{const}$.
2. $y' = \cos(ay + bx),\ a \neq 0,\ b^2 > a^2$.
3. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y + x$.
4. $xy' - x(y-x)\sqrt{y^2-x^2} - y = 0$.
5. $xy' + x\cos\frac{y}{x} - y + x = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

5.4. Să se integreze ecuațiile:

1. $(2y + x + 1)\,y' = 2x + y - 1.$
2. $(2x + 3y + 1)\,y' + (x + 2y - 5) = 0.$
3. $xy' + y - 2x + 1 = 0.$
4. $(2y - 3x + 1)^2\,y' = (3y - 2x - 4)^2.$

5.5. Să se determine traiectoriile ortogonale ale familiei de curbe reprezentate de soluția generală a ecuației

$$2x^3y' - y\,(3x^2 + y^2) = 0.$$

5.6. Să se determine soluțiile generale ale ecuațiilor:

1. $xy' \ln x + y = ax(\ln x + 1),\ x > 0.$
2. $y' + y \cos x = e^{\sin x}.$
3. $y'\sqrt{a^2 + x^2} + y = \sqrt{a^2 + x^2} + x,\ (a \neq 0)$, și să se determine curba integrală ce trece prin punctul $P(0, a \ln |a|)$.
4. $y' \cos x - 2y \sin x = \cos x,\ P\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi + 2}{4}\right).$

5.7. Fie ecuația liniară neomogenă

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Se cere să se arate că:

1. Între trei soluții particulare y_1, y_2, y_3 ale ei avem relația $y_1 - y_2 = C(y_1 - y_3),\ C = \text{const.}$

2. Dacă (Γ_1), (Γ_2) și (Γ_3) sînt trei curbe integrale ale ei pe care se consideră punctele M_i și $M_i'(i = 1, 2, 3)$ corespunzătoare unei abscise x, respectiv x', dreptele M_1M_1', M_2M_2', M_3M_3' sînt concurente.

3. Tangentele la curbele integrale în punctele de pe aceeași abscisă sînt concurente.

5.8. Să se determine soluțiile generale ale ecuațiilor:

1. $2xyy' - y^2 + ax = 0.$
2. $yy' + y^2 + 4x(x + 1) = 0.$
3. $y' \cos x - y^4 - y \sin x = 0.$

Scanned with OKEN Scanner

4. $3xy' - 3y^4 x \ln x - y = 0,\ x > 0.$

5. $y' \cos y + x \sin y \cos^2 y - \sin^3 y = 0.$

6. $(x^2y^3 + xy)y' = 1$, și să se determine curba integrală ce trece prin punctul $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

5.9. Să se determine soluțiile generale ale următoarelor ecuații știind că funcțiile indicate în dreptul lor sînt soluții particulare.

1. $y' - y^2 - y \sin 2x - \cos 2x = 0,\ y_1 = \operatorname{tg} x.$

2. $x^2(y' + y^2) + 4xy + 2 = 0,\ y_1 = \frac{a}{x},\ x \neq 0,\ a \in R.$

3. $y' + ay(y - x) = 1,\ y_1 = x.$

4. $2x^2y' - 2y^2 - 3xy + 2a^2x = 0,\ y_1 = a\sqrt{x} - \frac{x}{2},\ a \in R.$

5. $xy' + axy^2 + 2y + bx = 0,\ y_1 = -\frac{1}{ax}$

5.10. Să se integreze ecuația:

$$(1 - x^3)y' + x^2y - y^2 + 2x = 0.$$

căutînd o soluție particulară, sub forma unui polinom de gradul întîi. Să se integreze apoi aceeași ecuație căutînd soluții particulare sub forma unui polinom de gradul doi.

5.11. Fie ecuația lui Riccati

$$y' + P(x)y^2 + Q(x)y = R(x).$$

1. Să se arate că dacă $y_i(x),\ i = 1, 2, 3$ sînt soluții ale ei, atunci soluția generală y satisface relația

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C,\ (C = \text{const.})$$

2. Soluția generală y este o funcție omografică de constanta de integrare C.

5.12. Să se integreze ecuația

$$x^2(y' + ay^2) + bx^\alpha + c = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.13. Să se arate că ecuația

$$y' + (y^2 - x^2) f(x) - 1 = 0,$$

se poate totdeauna integra.

5.14. Să se integreze ecuația

$$2(xy' - y^2)(1 - x^2) + (3x^2 - 5)(y - 1) - 2(x^2 - 1) = 0.$$

5.15. Să se determine soluția generală a ecuației

$$\frac{2x}{y^3}\,dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy = 0$$

și curba integrală ce trece prin punctul $P(1, 1)$.

5.16. Să se integreze ecuațiile știind că admit factor integrant funcții de forma celor scrise în dreptul lor:

1. $[x \sin(xy) + \cos(x + y) - \sin y]\,dy +$
$+ [y \sin(xy) + \cos(x + y) + \cos x]\,dx = 0$
2. $(2x^2y + x)\,dy + (2xy^2 - x^2y^3 + y)\,dx = 0,\ \mu = \mu(x^3y^3).$
3. $(x^2 + y^2 + x)\,dy - y\,dx = 0,\ \mu = \mu(x^2 + y^2).$
4. $(7xy^3 + y - 5x)\,dy + y(y^3 - 5)\,dx = 0,\ \mu = \mu(y^3 - 5).$
5. $[x\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - y(x^2 + y^2)]\,dy - [y\sqrt{x^2 + y^2 + 1} +$
$+ x(x^2 + y^2)]\,dx = 0,\ \mu = \mu((x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + 1}).$

5.17. Să se integreze următoarele ecuații:

1. $xy'^2 + 4y' - 2y = 0.$
2. $xy'^2 - 2y' - y = 0.$
3. $y'^2 - 2xy' + y = 0.$
4. $y'^2 + (x - 2)\,y' - y + 1 = 0.$
5. $y'^2 + (ax + 1)\,y' - ay + 1 = 0,\ a \in R.$
6. $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2},\ a \in R.$

Scanned with OKEN Scanner

5.18. Să se integreze ecuațiile următoare făcînd transformările indicate:

1. $xy'^2 + yy' - x^2 = 0, \quad y = \sqrt{|x|^3} \cdot u(x).$
2. $(xy' + 1)^2 - 2y + x^2 = 0, \quad y = \frac{1}{2}(u^2(x) - x^2).$
3. $y'^2 + x^3y' - 2x^2y = 0, \quad t = x^2, \quad y = u(t).$
4. $9yy'^2 + 4x^3y' - 4x^2y = 0, \quad t = x^2, \quad y^2 = u(t).$
5. $y'^3 - xy^4y' - y^5 = 0, \quad u = \frac{1}{y}, \quad u'(x) = v(x).$
6. $xy^2y'^3 - y^3y'^2 + x(x^2 + 1)y' - x^2y = 0, \; x^2 = t, \; y^2 = u(t).$

5.19. Să se determine traiectoriile ortogonale:

1. ale parabolelor $y^2 = 2px$;
2. la o lemniscată scrisă în coordonate carteziene ortogonale;
3. ale cercurilor $x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0. \quad \lambda \in R.$

5.20. Să se determine traiectoriile izogonale ale curbelor:

1. $y = Cx, \quad x \in R.$
2. $x^2 - 2y - x = C, \quad C = \text{const}.$

5.21. Să se integreze ecuațiile:

1. $y''' - 8y = xe^{2x}.$
2. $y'' - 4y' + 3y = x^2 + \sin x.$
3. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(\cos x + x).$
4. $y''' + 2a^2y'' + a^4y = \cos ax + x \sin ax, \quad a \in R.$

5.22. Funcțiile $x, x^3 - 2$ formează un sistem fundamental de soluții pentru o ecuație liniară omogenă de ordinul II. Să se formeze ecuația liniară și să se determine soluția particulară care verifică condițiile $y(0) = 2, \; y'(0) = 1.$

5.23. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

1. $x^3y'' + 3x^2y' + xy = 0.$
2. $x^2y'' - xy' + y = 2x + 1 + \frac{1}{x}.$
3. $x^3y'' - x^2y' + xy = \ln^3 x, \quad x > 0.$
4. $x^2y'' + axy' + by = 0, \quad a, b \in R.$

Scanned with OKEN Scanner

5.24. Să se integreze ecuațiile diferențiale de ordin superior:

1. $x(x+1)^2 yy'' - x(x+1)^2 y'^2 + 2(x+1)yy' - x(x+2)y^2 = 0.$
2. $x^2yy'' - (y - xy')^2 = 0.$
3. $x(yy'' + y'^2) - yy' = 0.$
4. $(y^2 + x)y'' + 2(y^2 - x)y'^3 + 4yy'^2 + y' = 0$, considerînd pe x funcție de y.
5. $yy'y'' - y'^3 - y'^2 = 0.$
6. $2y'^2 = (y-1)y''.$
7. $x^2y''^2 - x^2y'y''' - y'^2 = 0.$
8. $3y'y''^2 - (1+y'^2)y''' = 0.$

5.25. Să se integreze următoarele ecuații liniare:

1. $y''' + (3x+2)y'' + y' + (3x+2)y = 0.$
2. $(x-1)y'' - xy' + y = x^2 - 2x + 2.$
3. $y''' - 2y'' - a^2y' + 2a^2y = \sin x, \quad a \in R.$
4. $(1+x^3)y'' - 3x^2y' + 3xy = 0, \quad y_1 = x.$
5. $x^2y''' + (x+1)y'' - y = 0.$
6. $xy'' - y' - 4x^3y = 0.$

5.26. Să se integreze ecuațiile următoare făcînd transformările indicate:

1. $x^2y'' + 4x^3y' + (4x^4 + 2x^2 + 1)y = 0, \quad u = e^{x^2}y.$
2. $y'' + y' + ae^{-2x}y = 0, \quad e^{-x} = t, \; u(t) = y(x).$
3. $x^6y'' + (3x^2 + a)x^3y' + by = 0, \; t = \frac{1}{x^2},$

$y(x) = u(t), \; a, b \in R.$

5.27. Să se integreze ecuația lui Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu \in R$$

căutînd soluții de forma $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k}$ (serie generalizată de

Scanned with OKEN Scanner

puteri), unde r reprezintă o constantă oarecare, nu neapărat întreagă.

5.28. Să se integreze ecuațiile următoare reducîndu-le la ecuații de tip Bessel.

1. $y'' + y = 0.$
2. $x^2y'' + xy' - (x + \nu^2)y = 0.$
3. $x^2y'' - [ax^2 + b(b-1)]y = 0.$
4. $y'' + (e^{2x} - \nu^2)y = 0.$
5. $x^2y'' + (ax^2 + b)y = 0, \quad a \in R.$
6. $y'' + xy = 0.$

5.29. Să se rezolve sistemele de ecuații diferențiale:

1. $\begin{cases} y' + 2y - z = -e \\ z'' - 3z' + 5z - 9y = 3e^x. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2y' + y - z - u = 0 \\ 2z' + y - 3z + u = 0 \\ u' - 2y + z - u = 0. \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' + 4u = 3x + 1 \\ z' - u = x^2 \\ u' + 2y - z = 0. \end{cases}$
4. $\begin{cases} y'' + z'' + y' = \sin 2x \\ 2y'' + z'' \quad = 2x. \end{cases}$
5. $\begin{cases} xy' - 2xz' - 3y + 4z = 0 \\ xy' + xz' - 2y - 3z = 0, \quad x > 0. \end{cases}$
6. $\begin{cases} (x-1)y' + 2y = x - 1. \\ (x-1)z' + (x+1)y - (x-1)z = 1 - x. \end{cases}$
7. $\begin{cases} y' + 9y + 12z + 5u = x + 1 \\ z' - 5y - 6z - 3u = x^2 \\ u' - y - yz - u = 1. \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

5.30. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

1. $\begin{cases} xy' + 2y - 3z = \sin(\ln x) \\ xz' - y - 4z = \cos(\ln x), \ x > 0, \end{cases}$

$$y(1) = \frac{23}{37}, \quad z(1) = \frac{15}{74}.$$

2. $\begin{cases} xy' + y - 2z = x^2 \\ xz' + 3y - 4z = -x, \ y(1) = \frac{5}{9}, \ z(e) = \frac{e^3}{9}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y' + z + u = e^x \\ z' + y - z = 1 \\ u' - y - u = xe^x, \quad y(0) = 1, z(0) = -1, \quad u(0) = -2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy' - 2y = -x \\ x^3z' + y - x^2z = x \\ x^4u' + y + x^2z - x^3u = x, \end{cases}$

$$y(1) = 0, \ z(1) = 0, \ u(1) = 0.$$

5.31. Să se integreze următoarele sisteme simetrice:

1. $\dfrac{dx}{xy^2} = \dfrac{dy}{yx^2} = \dfrac{dz}{z(x^2 + y^2)}.$

2. $\dfrac{dx}{\cos y} = \dfrac{dy}{\cos x} = \dfrac{dz}{\cos x \cos y}.$

3. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z + a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad a \in R.$

4. $\dfrac{dx}{x + y + z} = \dfrac{dy}{x + y} = -\dfrac{dz}{x + y}.$

Scanned with OKEN Scanner

5.1.1. Ecuația este cu variabile separabile. Scriem ecuația astfel:

$$\left(1-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

Integrăm termen cu termen:

$$y-\ln y=-\frac{1}{x}-\ln x-\ln C,\quad C=\text{const.}$$

de unde

$$y=C\,x\,e^{y+\frac{1}{x}}.$$

2. Ecuația se scrie

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2x^3-2}{(2x^3-1)x}\,\mathrm{d}x$$

sau

$$3\,\frac{\mathrm{d}y}{y}=\left[\frac{6}{x}-\frac{6x^2}{2x^3-1}\right]\mathrm{d}x,$$

de unde $y^3(2x^3-1)=Cx^6$, $C=\text{const.}$

3. $\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y=\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, de unde

$$\arcsin y+y\sqrt{1-y^2}=C+\arcsin x+x\sqrt{1-x^2},$$

$$C=\text{const.}$$

4. Avem

$$\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y(1+y^2)},$$

de unde $\ln(1+x^2)=2\ln y-\ln(1+y^2)+\ln C$, $C=\text{const.}$

deci $(1+x^2)(1+y^2)=Cy^2$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Dacă $n \neq -1$, scriem $\dfrac{dy}{1+y^2} = ax^n dx$,

cu soluția generală

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{a}{n+1}x^{n+1} + C\right), \quad x \in R - (a), \quad C = \text{const.}$$

Pentru $n = -1$ ecuația devine

$$\frac{dy}{1+y^2} = a\frac{dx}{x},$$

cu soluția generală $y = \operatorname{tg}(a \ln Cx)$, $x \neq 0$.

5.2. Separăm variabilele:

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x},$$

de unde soluția generală

$$y = e^{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}, \quad x \in -R - \{k\pi\}, \ k \in Z, \quad C = \text{const.} \tag{1}$$

Punînd condiția ca punctul $P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ să verifice (1), obținem $0 = \operatorname{Ctg}\frac{\pi}{4}$, de unde $C = 0$.

Deci soluția particulară este $y = 1$.

5.3.1. Ecuația este de forma

$$y' = \frac{y}{x} + g(x)f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Cu schimbarea de funcție $y = xu(x)$, $(y' = u + xu')$ ecuația devine o ecuație cu variabile separabile:

$$u' = -(au^2 + b),$$

cu soluția generală

$$u = \sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tg}(C - \sqrt{ab}\,x), \quad C = \text{const.}$$

deci soluția generală a ecuației date este

$$y = \sqrt{\frac{b}{a}}\, x \operatorname{tg}(C - \sqrt{ab}\, x), \quad C = \text{const.}$$

2. Ecuație de tipul $y' = f(ax + by + c)$.

Făcînd schimbarea de funcție $u(x) = ay + bx$ în ecuația

$$u' = a \cos u + b,$$

variabilele se separă :

$$\frac{\mathrm{d}u}{a \cos u + b} = \mathrm{d}x$$

sau $x + C = \int \frac{\mathrm{d}u}{a \cos u + b}$, de unde

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}} \operatorname{ctg} \frac{u}{2}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{b^2 - a^2} = C, \quad C = \text{const.}$$

de unde

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}} \operatorname{ctg} \frac{ay + bx}{2}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{b^2 - a^2} = C.$$

3. Ecuația este de tipul $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Facem schimbarea de funcție $y = xu(x)$; ecuația devine

$$\frac{u'}{e^u + 1} = \frac{1}{x},$$

cu soluția generală

$$\ln C|x| = \ln \left|\frac{e^u}{e^u + 1}\right|,$$

de unde

$$e^{\frac{y}{x}} = \frac{Cx}{1 - Cx}, \quad C = \text{const.},$$

sau

$$y = x \ln \left|\frac{Cx}{1 - Cx}\right|, \quad x \neq 0, \; x \neq \frac{1}{C}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4. Vezi ex. 1. Facem schimbarea de funcție $y = xu(x)$, $(y' = u + xu')$. Ecuația devine

$$u' = |x|(u - 1)\sqrt{u^2 - 1}.$$

Punînd $u = \dfrac{1}{\cos v}$, obținem ecuația

$$v' = \pm x(1 - \cos x),$$

cu soluția generală

$$x^2 = \pm 2\operatorname{ctg}\frac{v}{2} + C, \quad C = \text{const.}$$

de unde soluția generală a ecuației date

$$(x^2 - C)^2 = 4\,\frac{y + x}{y - x}.$$

5. (Vezi ex. 3) $y = xu(x)$. Ecuația devine

$$xu' + \cos u + 1 = 0,$$

cu soluția generală

$$Cx = e^{-\operatorname{tg}\frac{u}{2}}, \quad C = \text{const.}$$

de unde

$$Cx = e^{-\operatorname{tg}\frac{y}{2x}}.$$

5.4.1. Ecuația este de forma $y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$ și e omogenă în $ax + by + c$, $a_1x + b_1y + c_1$.

Dreptele $x + 2y + 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ sînt paralele.

Cu schimbarea de funcție $2y + x = u(x)$ obținem ecuația cu variabile separabile

$$\frac{u + 1}{3u - 1}\,du = dx, \quad 3u - 1 \neq 0,$$

cu soluția generală

$$4\ln|3u - 1| + (3u - 1) = 9(x + C), \quad C = \text{const.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Integrala generală a ecuației date este

$$2\ln|6y + 3x - 1| = 3(x - y) + C, \quad 6y + 3x - 1 \neq 0.$$

$3u - 1 = 0$ ne dă soluția $6y + 3x - 1 = 0$ care verifică ecuația dată. Această soluție se obține din integrala generală pentru $C \to -\infty$.

2. Dreptele $2x + 3y + 1 = 0$, $x + 2y - 5 = 0$ sînt concurente în punctul $P(-17, 11)$. Cu schimbarea de variabilă și funcție:

$$x = u - 17, \quad y = v(u) + 11, \tag{1}$$

obținem ecuația omogenă

$$(2u + 3v)v' + u + 2v = 0.$$

Aici facem schimbarea de funcție $v = ut(u)$ și obținem ecuația

$$\frac{2 + 3t}{3t^2 + 1}\,dt = -\frac{du}{u},$$

de unde

$$3\ln(3t^2 + 1) + 4\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}t) + \ln|u| = C,$$

deci integrala generală

$$3\ln\left[3\left(\frac{y - 11}{x + 17}\right)^2 + 1\right] + 4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\left(\frac{y - 11}{x + 17}\right) + 6\ln|x + 17| = C, \quad C = \text{const.}$$

3. Dreptele $x = 0$ și $2x - y - 1 = 0$ se intersectează în punctul $P(0, -1)$. Se face schimbarea de funcție $y = u(x) - 1$. Ecuația devine $xu' + u - 2x = 0$ sau $u' + \frac{u}{x} - 2 = 0$, cu soluția $C = x|u - x|$, $C = \text{const}$. De aici obținem soluția generală $x|y - x + 11| = C$.

4. (Vezi 2)

$$x = u + \frac{11}{5}, \quad y = v(x) + \frac{14}{5}.$$

Integrala generală este

$$\frac{(y - 4x + 6)^5\,(4y - x - 9)^5}{5(y - x) - 3} = C, \quad C = \text{const.}$$

5.5. Ecuația este omogenă. Cu $y = xu(x)$ obținem ecuația

$$\frac{2du}{u(1+u^2)} = \frac{dx}{x},$$

cu soluția

$$x = \frac{Cu^2}{u^2+1}, \quad C = \text{const.}$$

Curbele integrale $x(x^2+y^2) = cy^2$ sînt cisioide. Schimbînd pe y' cu $-\frac{1}{y'}$, obținem ecuația diferențială a traiectoriilor ortogonale:

$$(3x^2+y^2)yy' + 2x^3 = 0,$$

cu integrala generală

$$2x^2 + y^2 = Cx(x^2+y^2).$$

5.6.1. Ecuația este liniară. Ecuația omogenă

$$xy'\ln x + y = 0$$

are soluția

$$y \ln x = C, \quad C = \text{const.}$$

Considerînd aici pe C funcție de x vom pune condiția ca funcția $y = \frac{C(x)}{\ln x}$ să verifice ecuația dată. Avem $C'(x) = a(\ln x + 1)$, de unde

$$C = ax\ln x + C_1, \quad C, C_1 = \text{const.}$$

Soluția generală a ecuației neomogene este

$$y = ax + \frac{C_1}{\ln x}.$$

2. Ecuație liniară. Vom căuta o soluție de forma

$$y = u(x).v(x).$$

Obținem ecuația

$$u'v + u(v' + v\cos x) = e^{2x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Determinăm funcția v punînd condiția ca în această ecuație coeficientul lui u să fie nul:

$$v' + v\cos x = 0,$$

de unde o soluție

$$v = e^{-\sin x}.$$

Din

$$e^{-\sin x}u' = e^{2x}$$

obținem

$$u = \int e^{2x+\sin x}\,dx + k, \quad k = \text{const.}$$

Deci

$$y = e^{-\sin x}\left(\int e^{2x+\sin x}\,dx + k\right), \quad k = \text{const.}$$

3. Soluția generală este

$$y = (\sqrt{x^2+a^2} - x)\,[\ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + k], \quad k = \text{const.}$$

iar curba integrală ce trece prin P este

$$y = (\sqrt{a^2+x^2} - x)\ln(x + \sqrt{a^2+x^2}), \quad x \in R.$$

4. Soluția generală este

$$y = \frac{1}{\cos^2 x}\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C\right], \; x \in R - \left\{\frac{(2k+1)}{2}\right\},$$

$$k \in Z, \quad C = \text{const.}$$

iar curba integrală ce trece prin P este

$$y = \frac{1}{\cos^2 x}\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right].$$

5.7.1. Dacă y_i, $i = 1, 2, 3$ sînt integrale particulare avem

$$y_1' - y_2' + P(y_1 - y_2) = 0$$

$$y_1' - y_3' + P(y_1 - y_3) = 0$$

sau

$$d\ln(y_1 - y_2) = d\ln(y_1 - y_3) \text{ deci } y_1 - y_2 = C(y_1 - y_3),$$

$$C = \text{const.}$$

2. Relaţia $y_1 - y_2 = C(y_1 - y_3)$ este echivalentă cu $M_1M_2 = CM_1M_3$ pentru orice x, deci pentru x' avem $M_1'M_2' = CM_2'M_3'$, de unde $\frac{M_1M_2}{M_1M_3} = \frac{M_1'M_2'}{M_1'M_3'}$.

3. Dacă $x' \to x$ dreptele M_iM_i' devin tangente în punctele M_i, $i = 1, 2, 3$ la curbele date.

Ecuaţiile tangentelor în punctele de aceeaşi abscisă x la două curbe integrale distincte ale ecuaţiei liniare sînt

$$Y - y_1 = y_1'(X - x), \quad Y - y_2 = y_2'(X - x),$$

de unde

$$X = x - \frac{y_2 - y_1}{y_2' - y_1'}, \quad Y = \frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_2' - y_1'},$$

sau

$$X = x + \frac{1}{P}, \quad Y = \frac{Q}{P}.$$

5.8.1. Ecuaţia este de tip Bernoulli.

Facem schimbarea de funcţie $y^2(x) = u(x)$. Avem $u' = 2yy'$ şi ecuaţia devine liniară :

$$xu' - u + ax = 0,$$

cu soluţia generală $u = Cx - ax\ln x$, $C = \text{const}$. Rezultă :

$$y^2 = Cx - ax\ln x.$$

2. Tip Bernoulli. Cu $y^2 = u(x)$ obţinem ecuaţia liniară

$$u' + 2u + 8x(x + 1) = 0,$$

cu soluţia generală $u = -4x^2 + Ce^{-2x}$, $C = \text{const.}$, deci soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y^2 + 4x = Ce^{-2x}.$$

3. Ecuaţie de tip Bernoulli. Seriem $y'\cos x - y\sin x = y^4$.

Împărţim cu y^4 şi facem schimbarea de funcţie $u(x) = \frac{1}{y^3(x)}$.

Se obţine ecuaţie liniară

$$u'\cos x + 3u\sin x + 3 = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

cu soluția generală

$$u = C\cos^3 x + 2\sin^3 x - 3\sin x, \quad C = \text{const.}$$

de unde

$$y^{-3} = C\cos^3 x + 2\sin^3 x - 3\sin x.$$

4. Avem $3xy' - y = 3y^4 x \ln x$, sau

$$3xy^{-4}y' - y^{-3} = 3x\ln x.$$

Se face schimbarea de funcție $u = \frac{1}{y^3}$. Se obține soluția generală

$$xy^{-3} + \frac{3}{4}x^2[2\ln x - 1] = C, \quad C = \text{const.} \quad x > 0.$$

5. Cu schimbarea de funcție $u = \text{tg}y$ se obține ecuația de tip Bernoulli $u' + xu - u^3 = 0$. Cu schimbarea de funcție $z = \frac{1}{u^2}$ se obține ecuația liniară $z' - 2xz + 2 = 0$ cu soluția

$$z = e^{x^2}\left[C - 2\int e^{-x^2}\,dx\right], \quad x \in R, \quad C = \text{const.}$$

Rezultă

$$\text{tg}^2 y = e^{x^2}\left[C - 2\int e^{-x^2}dx\right].$$

6. Considerînd pe y ca variabilă și x funcție de y obținem ecuația de tip Bernoulli

$$\frac{dx}{dy} - yx = y^3x^2,$$

care prin schimbarea de funcție $u = \frac{1}{x}$ devine liniară :

$$\frac{du}{dy} + uy - y^3 = 0,$$

cu soluția generală

$$u = 2 - y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}, \quad C = \text{const.},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\frac{1}{x} = 2 - y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Pentru curba integrală ce trece prin punctul dat avem $C = 0$, deci, ea are ecuația $(2 - y^2)x = 1$.

5.9.1. Ecuația este de tip Riccati. Cu schimbarea de funcție $y = y_1 + u$ obținem ecuația de tip Bernoulli

$$u' - (\sin 2x + 2\,\mathrm{tg}x)u = u^2,$$

care se transformă în ecuația liniară

$$z' + (\sin 2x + 2\mathrm{tg}x)\,z = -1,$$

unde $z = \frac{1}{u}$. Integrînd această ecuație și ținînd seama de transformările făcute se obține soluția generală a ecuației date

$$y = \mathrm{tg}\,x + \frac{1}{\cos^2 x}\,e^{-\cos^2 x}\left[C - \int \frac{e^{-\cos^2 x}}{\cos^2 x}\,dx\right]^{-1}, \quad C = \mathrm{const}.$$

2. Vom determina valoarea lui a așa încît y_1 să verifice ecuația dată. Înlocuind $y_1 = \frac{a}{x}$ în ecuație obținem

$$a^2 + 3a + 2 = 0; \quad a = -2, \quad a = -1.$$

$y_1 = -\frac{1}{x}$, $y_2 = -\frac{2}{x}$ sînt soluții particulare ale ecuației date.

Pentru aceste soluții avem

$$x^2(y' - y_1') + 4x(y - y_1) + x^2(y^2 - y_1^2) + 2 = 0$$
$$x^2(y' - y_2') + 4x(y - y_2) + x^2(y^2 - y_2^2) + 2 = 0,$$

de unde

$$\frac{y' - y_1'}{y - y_1} - \frac{y' - y_2'}{y - y_2} + (y_1 - y_2) = 0,$$

deci

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = e^{-\int (y_1 - y_2)\,dx},$$

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd inlocuirile obţinem

$$\frac{x}{2}\left(y+\frac{1}{x}\right)=e^{-\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x}\right)dx},$$

deci

$$x(x-C)y+x-2C=0,\ C=\text{const.}$$

3. Se observă că $y_1=x$ e o soluţie particulară. Se face schimbarea de funcţie $u(x)=y(x)-x$. Soluţia generală va fi

$$y=x+e^{-\frac{ax^2}{2}}\left[a\int e^{-\frac{ax^2}{2}}\,dx+C\right]^{-1},\quad C=\text{const.}$$

4. Cu $y=a\sqrt{x}-\frac{x}{2}+u(x)$, ecuaţia devine

$$2x^2u'-2u^2-u(x+4a\sqrt{x})=0.$$

care este o ecuaţie de tip Bernoulli. Cu $z=\frac{1}{u}$ ecuaţia devine liniară

$$2x^2z'+z(x+4a\sqrt{x})=-2.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date va fi

$$\left(y+\frac{x}{2}-a\sqrt{x}\right)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\frac{4a}{\sqrt{x}}}\left[\int\frac{dx}{x\sqrt{x}\,e^{\frac{4a}{\sqrt{x}}}}+C\right],\ C=\text{const.}\ x>0.$$

5. Fie $y=u(x)-\frac{1}{ax}$. Ecuaţia devine

$$u'+au^2+b=0,$$

de unde

$$x=-\int\frac{du}{au^2+b}+C,\ C=\text{const.},$$

deci

$$u=\begin{cases}\operatorname{tg}(C-ax), & a=b.\\ \sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tg}(C-\sqrt{ab}x), & a\neq b.\end{cases}$$

Pentru $b=-a$ avem soluţiile singulare $u=\pm 1$[21].

Scanned with OKEN Scanner

5.10. Fie soluția particulară :

$$y_1 = ax + b,$$

care înlocuită în ecuație ne dă condițiile :

$$a^2 - b = 0,$$

$$2ab - 2 = 0,$$

$$a = b^2,$$

de unde deducem

$$a = 1,\ b = 1.$$

Avem, deci : $y_1 = x + 1$.
Făcînd schimbarea :

$$y = y_1 + z$$

obținem ecuația de tip Bernoulli :

$$z'(1 - x^3) + z(x^2 - 2x - 2) - z^2 = 0.$$

Din această ecuație cu schimbarea de funcție :

$$z = \frac{1}{u}$$

obținem ecuația liniară

$$u'(x^3 - 1) + u(x^2 - 2x - 2) = 1,$$

cu soluția :

$$u = \frac{C(x-1) - 1}{x^2 + x + 1}, \quad C = \text{const.},$$

deci

$$z = \frac{x^2 + x + 1}{C(x - 1) - 1},$$

de unde soluția generală a ecuației date :

$$y = \frac{x^2 k - 1}{x - k}, \qquad x \neq k, \left(k = \frac{C + 1}{C} \right).$$

Fie acum soluția particulară de forma :

$$y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3.$$

Punînd condiţia ca y să verifice ecuaţia, obţinem pentru a_1, a_2 şi a_4 valorile:

I. $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1$

sau

II. $a_1 = -1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0.$

Deci, pentru ecuaţia dată am obţinut două soluţii particulare:

$$y_1 = x + 1,\ y_2 = -x^2.$$

Soluţia ecuaţiei date va fi:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = e^{-\int \frac{C}{A}(y_1 - y_2)dx},$$

sau

$$y = \frac{x^2(C + 1) - C}{Cx - C - 1},$$

5.11. Din

$$y' + P(x)\,y^2 + Q(x)y = R(x)$$

$$y_i' + P(x)\,y_i^2 + Q(x)\,y_i = R(x),\ i = 1, 2, 3$$

avem

$$\frac{y' - y_i'}{y - y_i} + Q(x) + P(x)\,(y + y_i) = 0,\ i = 1, 2, 3$$

sau

$$\frac{y' - y_1'}{y - y_1} - \frac{y' - y_2'}{y - y_2} + P(x)(y_1 - y_2) = 0 \qquad \text{etc.},$$

de unde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\frac{y - y_1}{y - y_2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}\right) = -P(x)(y_1 - y_2),$$

deci

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C.\ C = \text{const.} \qquad (1)$$

Rezultă că raportul anarmonic a patru soluţii ale ecuaţiei lui Riccati este constant.

Scanned with OKEN Scanner

2. Din (1) deducem

$$y = \frac{y_1(y_3 - y_2) - Cy_2(y_3 - y_1)}{y_3 - y_2 - C(y_3 - y_1)},$$

deci o expresie de forma

$$y = \frac{f_1(x) + Cf_2(x)}{f_3(x) + Cf_4(x)}.$$

5.12. Cu schimbarea de funcție $u(x) = xy(x) + A$ obținem ecuația

$$xu' + au^2 - a_1u + bx^2 = 0, \tag{1}$$

unde

$$aA^2 + A + C = 0, \; a_1 = 2aA + 1.$$

În (1) facem transformările $t = x^{a_1}$, $u = t\eta(t)$ și obținem ecuația

$$\eta' + \frac{a}{a_1}\eta^2 = -\frac{b}{a_1}t^\beta, \; \beta = \frac{\alpha}{a_1} - 2. \tag{2}$$

Cu schimbarea de funcție $z(t) = \frac{a}{a_1}\eta(t)$ obținem ecuația

$$z' + z^2 = a_2t^\beta, \; a_2 = -\frac{ab}{a_1^2}. \tag{3}$$

Dacă $\beta = 0$ (3) este o ecuație cu variabile separabile.

Dacă $\beta = -2$ ecuația (3) este de tip Riccati, deci cu schimbarea de funcție $z(t) = t\,w(t)$ se obține ecuația

$$tw' + w^2 - w - a_2 = 0,$$

cu

$$\ln|t| = -\int \frac{dw}{w^2 - w - a_2} + C, \; C = \text{const.}$$

În cazul general $z' + z^2 = a_2t^\beta$ cu schimbarea de funcție $w(t) = t^{\gamma+1}\frac{w'}{w}$, $\gamma = -\frac{1}{\beta + 2}$ se obține ecuația diferențială liniară de ordinul doi (vezi ec. de ord. sup.).

$$tw'' + \gamma w' - w = 0 \quad [2].$$

Scanned with OKEN Scanner

5.13. Ecuația dată este de tip Riccati și admite soluția particulară $y = x$, oricare ar fi $f(x)$. Făcînd schimbarea de funcție:

$$y = x + \frac{1}{z}$$

obținem ecuația liniară

$$z' - (2xz + 1) f(x) = 0,$$

cu soluția

$$z = e^{\int 2xf(x)\,dx}\left[C + \int f(x)\, e^{-\int 2xf(x)\,dx}\,dx\right].$$

Deci

$$y = x + \frac{e^{-\int 2xf(x)\,dx}}{C + \int f(x)\, e^{-\int 2xf(x)\,dx}\,dx}.$$

5.14. Vom căuta o soluție de forma $y_1 = ax^n$, deci:

$$2anx^n - 2anx^{n+2} - 2a^2x^{2n} + 2a^2x^{2n+2} + 3ax^{n+2} - 5x^2 + 7 = 0$$

care trebuie să se reducă la o identitate între monoamele de gradele $0, 2, n, n + 2, 2n, 2n + 2$.

Dacă $n = 0$ rămîne:

$$(a - 1)(2a + 5)x^2 - (a - 1)(2a + 7) = 0,$$

care este o identitate pentru $a = 1$, deci

$$y_1 = 1.$$

Facem schimbarea de funcție:

$$y = 1 + \frac{1}{z}$$

și obținem ecuația

$$2(1 - x^2)z' + (9 - 7x^2)z + 2(1 - x^2) = 0$$

cu soluția

$$z = e^{-9x + \frac{7x^3}{3}}\left[C - 2\int (1 - x^2)\, e^{9x - \frac{7}{3}x^3}\,dx\right],$$

de unde

$$\frac{1}{y-1} = e^{x\left(\frac{7x^2}{3}-9\right)}\left[C - 2\int (1-x^2)e^{9x-\frac{7}{3}x^3}\,dx\right],\quad C = \text{const.}$$

Soluţia generală poate fi aproximată cu dezvoltări în serie.

5.15. Deoarece

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2-3x^2}{y^4}\right) = -\frac{6x}{y^4}$$

ecuaţia este o diferenţială totală, deci membrul întîi este diferenţiala unei funcţii $u(x, y)$:

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{2x}{y^3}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{y^2-3x_0^2}{y^4}\,dy,$$

deci

$$u = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + k,\ k = \text{const.},\ y \neq 0.$$

dar $du = 0$. Deci: $u = C_1$.

Soluţia generală a ecuaţiei date este:

$$x^2 - y^2 = Cy^3.$$

Pentru curba ce trece prin $P(1, 1)$, obţinem $C = 0$. Soluţiile particulare ale ecuaţiei sînt: $y = x$, $y = -x$, $x \in R$.

5.16.1. $\dfrac{\partial}{\partial x}[x\sin xy + \cos(x+y) - \sin y] =$

$$= \frac{\partial}{\partial y}[y\sin xy + \cos(x+y) + \cos x] =$$

$$= \sin xy + xy\cos xy - \sin(x+y).$$

Ecuaţia este o diferenţială totală exactă, deci membrul întîi este diferenţiala unei funcţii $u(x, y)$:

$$u = \int_{x_0}^{x} [y\sin xy + \cos(x+y) + \cos x]dx + \int_{y_0}^{y} [x_0\sin x_0 y + \cos(x_0+y) - \sin y]dy,$$

de unde

$$u = \sin(x+y) - \cos xy + \cos y + \sin x + C,\quad C = \text{const.}$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Vom determina funcţia μ din condiţia

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(2x^2y+x)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[(2xy^2-x^2y^3+y)\mu\right].$$

Notînd $x^3y^3=u$ condiţia devine

$$u\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}u}+\mu=0,$$

cu soluţia $\mu=\dfrac{k}{x^3y^3}$, $k=\text{const.}$

Înmulţind ecuaţia dată cu μ obţinem ecuaţia cu diferenţiale totale

$$\left(\frac{2}{xy^2}+\frac{1}{x^2y^3}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{1}{x^3y^2}+\frac{2}{x^2y}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=0,$$

de unde soluţia generală

$$\frac{1}{x^2y^2}+\frac{4}{xy}+2\ln x=C,\ C=\text{const.},\ x>0.$$

3. Condiţia

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2+x)\mu\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left(-y\mu\right),$$

cu notaţia $x^2+y^2=u$, devine

$$u\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}u}+\mu=0,$$

de unde

$$\mu=\frac{k}{x^2+y^2},\ k=\text{const.}$$

Înmulţind ecuaţia dată cu μ obţinem o ecuaţie cu diferenţiale totale exacte cu soluţia generală

$$y+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=C,\ C=\text{const.}$$

4. Se obţine $\mu=k(y^3-5)$, $k=\text{const.}$, iar soluţia generală este

$$10xy(y^3-5)^2+2y^5-25y^2=C,\ C=\text{const.}$$

5. $\mu = \dfrac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+1}}$ și soluția generală

$$\sqrt{x^2+y^2+1} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C,\ C = \text{const.}$$

5.17.1. Ecuația este de tip Lagrange. Avem

$$y = \frac{1}{2}[xy'^2 + 4y'].$$

Pentru $y' = p$ obținem

$$y = \frac{1}{2}xp^2 + 2p,$$

care derivată în raport cu x ne dă ecuația liniară

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2x}{p-2} = \frac{2}{p(2-p)}.$$

Integrînd obținem soluția ecuației date sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{(p-2)^2}\left[C + 4\ln|p| + \dfrac{8}{p}\right] - \dfrac{4}{p},\ C = \text{const.} \\ y = \left(\dfrac{p}{p-2}\right)^2\left[C + 4\ln|p| + \dfrac{8}{p}\right], \qquad p \neq 2. \end{cases}$$

Pentru $p = 2$ obținem soluția singulară $y = 2x + 4$.

2. Pentru $y' = p$ obținem $y = xp^2 - 2p$, care derivată în raport cu x ne dă ecuația liniară

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p-1} - \frac{2}{p(p-1)} = 0,\ p \neq 0,1.$$

cu soluția

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}[C + 2p - 2\ln|p|].$$

Deci soluția generală sub formă parametrică a ecuației date este

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{(p-1)^2}[C + 2p - 2\ln|p|],\ C = \text{const.} \\ y = p(xp - 2). \end{cases}$$

Dacă $p = 0$, $y = 0$; dreapta $y = 0$ este o integrală singulară.

Dacă $p \to 1$, $C \neq -2$, $|x| \to \infty$, deci dreapta $y = x - 2$ este o direcție asimptotică a curbelor integrale care au $C \neq -2$.

3. Ecuație de tip Clairant. Dacă $y' = p$ obținem $y = 2px - p^2$, care derivată în raport cu x ne dă ecuația diferențială

$$p\frac{dx}{dp} = 2(x - p),$$

cu soluția generală $x = \frac{C}{p^2} + \frac{2}{3}p$, $C = \text{const.}$

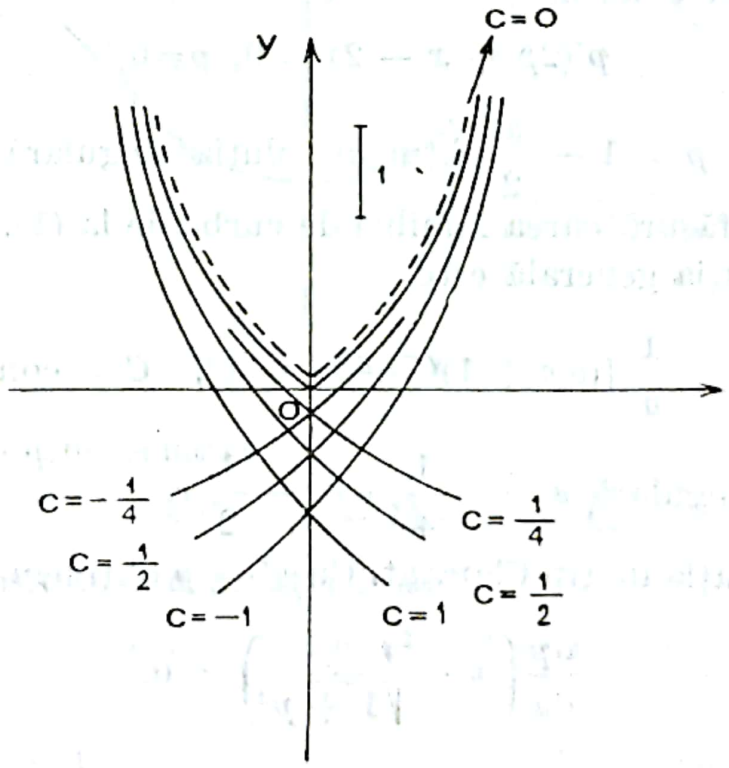


Fig. 5.17.1

Soluția generală a ecuației date va fi (fig. 5.17.1)

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} + \dfrac{2}{3}p, \\ y = p(2x - p). \end{cases}$$

Sistemul

$$\begin{cases} F(x, y') = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} + y' \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}, \quad \text{adică} \quad \begin{cases} p^2 - 2px + y = 0 \\ 2(p - x) = 0 \\ -2p + p = 0 \end{cases}$$

nu e compatibil,

deci ecuația nu are soluții singulare.

4. Ecuația de tip Clairant.

Soluția generală este $y = C(x - 2) + C^2 + 1$, $C = \text{const.}$ (1). Dacă $y' = p$ obținem $y = p^2 + (x - 2)p + 1$ care derivată în raport cu x ne dă

$$p'(2p + x - 2) = 0, \quad p \neq 0.$$

Pentru $p = 1 - \dfrac{x}{2}$ obținem soluția singulară $y = x - \dfrac{x^2}{4}$ care este înfășurătoarea familiei de curbe de la (1).

5. Soluția generală este

$$y = \frac{1}{a}[(ax + 1)C + C^2 + 1], \quad C = \text{const.}$$

și soluția singulară $y = -\dfrac{1}{4} ax^2 - \dfrac{1}{2} x.$

6. Ecuația de tip Clairant. Cu $y' = p$ obținem

$$\frac{dp}{dx}\left(x - \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = 0.$$

Dacă $\dfrac{dp}{dx} = 0$, $p = C$, deci $y' = C$ soluția ecuației este familia de drepte $y = Cx - a\sqrt{1 + C^2}$, $C = \text{const.}$

Dacă $x = \dfrac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$, $y = -\dfrac{a}{\sqrt{1 + p^2}}$ care este soluția singulară și reprezintă o înfășurătoare a familiei de drepte date de soluția generală. Într-adevăr, eliminînd pe p obținem ecuația înfășurătoarei $x^2 + y^2 = a^2$ (fig. 5.17.2).

Scanned with OKEN Scanner

5.18.1. Se obține ecuația cu variabile separabile

$$xu' + 2u = \pm \frac{1}{2}\sqrt{u^2 + 4\operatorname{sgn} x}\,.$$

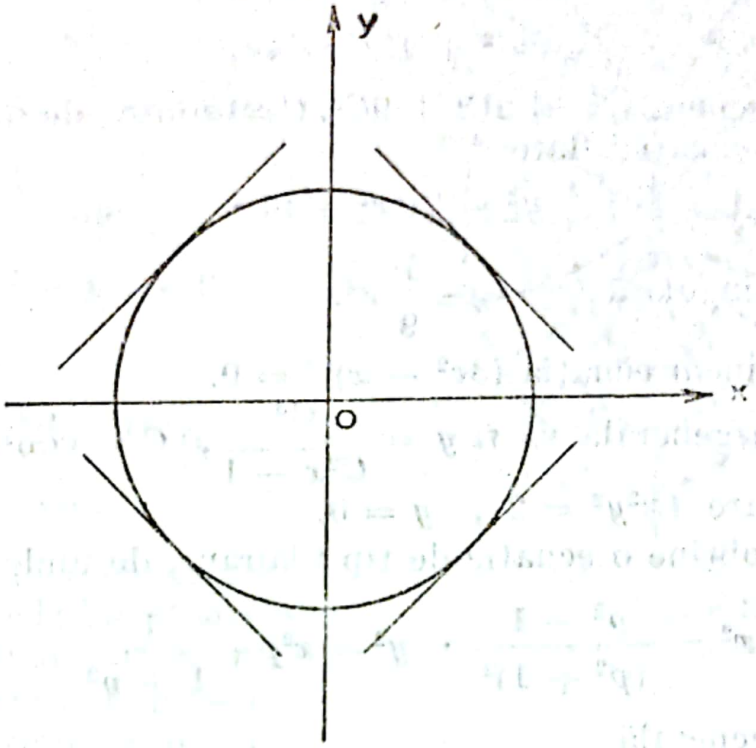


Fig. 5.17.2

2. Se obține ecuația

$$xuu' - (u - 1) + x^2 = 0,$$

care se transformă în ecuația liniară

$$(xv + 1)v' + v^2 + 1 = 0,$$

unde $v = \dfrac{u - 1}{x}$ și are soluția generală

$$x = \frac{C - \ln\left(v + \sqrt{1 + v^2}\right)}{\sqrt{v^2 + 1}},\quad C = \text{const.}$$

3. Obținem ecuația de tip Clairant

$$2u'^2 + tu' - u = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

cu soluția generală $u = tC + 2C^2$, $C = \text{const.}$ de unde $y = x^2C + 2C^2$ și soluția singulară $y = -\frac{x^4}{8}$.

4. Se obține ecuația de tip Clairant

$$9u'^2 + 4tu' = 4u,$$

cu soluția generală $u = 2Ct + 9C^2$, $C = \text{const.}$, de unde soluția generală a ecuației date

$$y^2 = 2Cx^2 + 9C^2$$

și soluția singulară $y^2 = -\frac{1}{9}x^4$.

5. Obținem ecuația $(3v^2 - x)v' = 0$.

Soluția generală va fi $y = \frac{C^3}{C^2x - 1}$, $C = \text{const.}$ și soluțiile singulare $4x^3y^2 = 27$, $y = 0$.

6. Se obține o ecuație de tip Clairant, de unde

$$x^2 = \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2}, \quad y^2 = x^2p + \frac{1}{1 + p^2}$$

și soluția generală

$$y^2 = Cx^2 + \frac{C}{C^2 + 1}, \quad C = \text{const.}$$

5.19.1. Ecuația diferențială a familiei de parabole este

$$y = 2y'x$$

(s-a eliminat p între $y^2 = 2px$ și $2yy' = 2p$).

Ecuația traiectoriilor ortogonale se obține înlocuind y' cu $-\frac{1}{y'}$, deci

$$yy' = -2x,$$

cu soluția $x^2 + \frac{y^2}{2} = C$, $C = \text{const.}$

Deci traiectoriile ortogonale sînt elipse (fig. 5.19.1).

2. Ecuația lemniscatei este

$$(x^2 + y^2) - 2\,a(x^2 - y^2) = 0, \quad (a = \text{const.}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Logaritmînd și diferențiind obținem ecuația diferențială

$$(3x^2 - y^2)yy' + (x^2 - 3y^2)x = 0.$$

Ecuația traiectoriilor ortogonale

$$xy'(x^2 - 3y^2) - y(3x^2 - y^2) = 0$$

are soluția

$$(x^2 + y^2)^2 = Cxy, \quad C = \text{const.}$$

deci o familie de lemniscate raportate la bisectoarele axelor de coordonate.

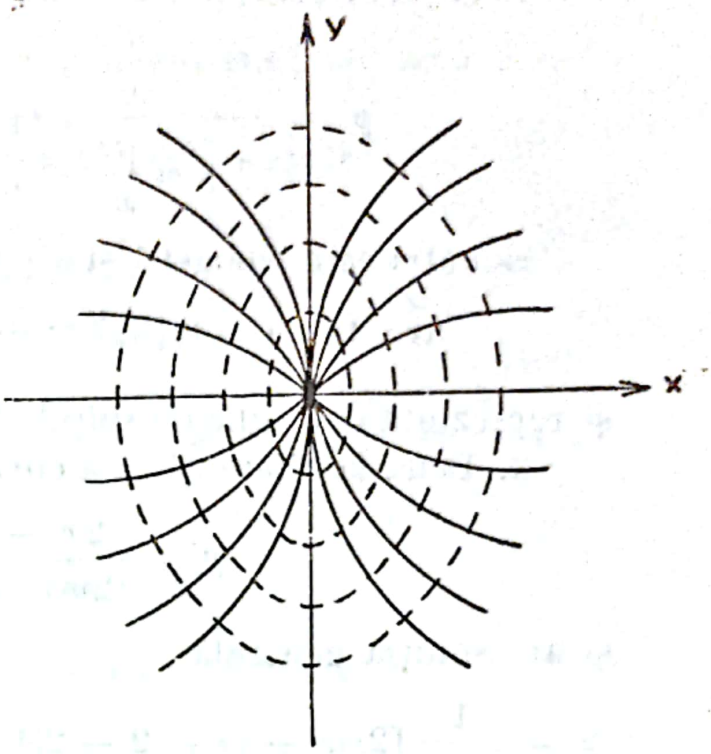


Fig. 5.19.1

3. Avem o familie de cercuri tangente în origine la axa Ox de ecuație diferențială

$$y'(x^2 - y^2) - 2xy = 0.$$

Ecuația traiectoriilor ortogonale

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$$

are soluția $x^2 + y^2 - Cx = 0$; $C = \text{const.}$, adică cercuri tangente în origine la Oy (fig. 5.19.2).

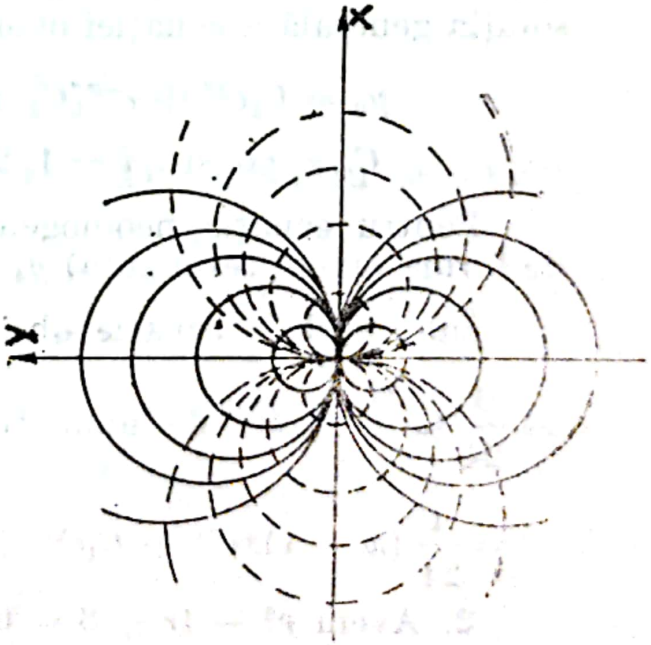


Fig. 5.19.2

5.20.1. Luăm $y' = C$ și eliminăm C între această relație și $y = Cx$; obținem

$$y'x = y.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația diferențială a curbelor izogonale va fi

$$y' = \frac{m + \frac{y}{x}}{1 - m\frac{y}{x}}, \quad m = \text{const. dată.}$$

Ecuația este omogenă și are soluția generală

$$\text{arc tg}\,\frac{y}{x} = m[\ln\sqrt{x^2 + y^2} + k],\ k = \text{const.}$$

și reprezintă o familie de spirale logaritmice.

2. Ecuația diferențilaă a curbelor izogonale este

$$y' = \frac{2x - 2m - 1}{2mx - m + 2}$$

și are soluția generală

$$y = \frac{1}{2m^2}[2mx - m + 2 - 2(1 + m^2)\ln(2mx - m + 2)] + k,$$

cu $2mx - m + 2 > 0$, $k = \text{const.}$

5.21.1. Ecuația este cu coeficienți constanți. Ecuația caracteristică $r^3 - 8 = 0$ are rădăcinile $r_1 = 2$, $r_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$, deci soluția generală a ecuației omogene $y''' - 8y = 0$ este

$$y_0 = C_1e^{2x} + e^{-x}[C_2\sin(x\sqrt{3}) + C_3\cos(x\sqrt{3})],$$
$$C_i = \text{const.},\ i = 1, 2, 3.$$

Pentru ecuația neomogenă căutăm o soluție particulară de forma (avem rezonanța) $y_p = (ax + b)xe^{2x}$.

Înlocuind în ecuație obținem $a = -b = \frac{1}{24}$, deci $y_p = \frac{1}{24}(x - 1)xe^{2x}$, de unde soluția generală a ecuației date

$$y = \frac{1}{24}(x - 1)xe^{2x} + C_1e^{2x} + e^{-x}[C_2\sin(x\sqrt{3}) + C_3\cos(x\sqrt{3})].$$

2. Avem $r^2 - 4r + 3 = 0$, $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, deci

$$y_0 = C_1e^x + C_2e^{3x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $y_p = a\sin x + b\cos x + cx^3 + dx^2 + ex + h$.

Înlocuind în ecuaţia neomogenă şi identificînd obţinem $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 0$, $d = \frac{1}{3}$, $e = \frac{8}{9}$, $h = -\frac{2}{9}$, deci

$$y_p = \frac{1}{6}\sin x + \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x - \frac{2}{9}.$$

Rezultă

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{1}{18}[3\sin x + 6\cos x + 6x^2 + 16x - 4].$$

3.

$$y_0 = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$$

$$y_p = \frac{xe^{-x}}{2}[\sin x + 2]; \; y = y_0 + y_p.$$

4. $y_0 = (C_1 + C_2 x)\cos ax + (C_3 + C_4 x)\sin ax$;

$y_p = Ax^2\cos ax + Bx^2\sin ax$ (avem rezonanţă),

se obţine

$$y_p = -\frac{x^2}{8a}\cos ax; \; y = y_0 + y_p.$$

5.22. Wronskianul celor două soluţii este

$$w(x, x^3 - 2) = \begin{vmatrix} x & x^3 - 2 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2(x^3 + 1) \neq 0 \text{ pentru } x^3 + 1 \neq 0.$$

Soluţia generală a ecuaţiei liniare este

$$y = C_1 x + C_2(x^3 - 2).$$

Punînd condiţiile iniţiale obţinem soluţia particulară

$$y_p = x + 2 - x^3.$$

Formăm ecuaţia liniară

$$\begin{vmatrix} x & x^3 - 2 & y \\ 1 & 3x^2 & y' \\ 0 & 6x & y'' \end{vmatrix} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

și dezvoltînd după ultima coloană obținem ecuația

$$(1 + x^3)y'' - 3x^2y' + 3xy = 0.$$

5.23.1. Ecuația se scrie $x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}$, și este de tip Euler. În ecuația omogenă : $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ luăm $y = x^r$ și obținem ecuația caracteristică

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

cu rădăcina dublă $r = -1$. Deci soluția generală a ecuației omogene va fi

$$y_0 = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x} \ln x, \; C_1, C_2 = \text{const.}$$

Pentru determinarea unei soluții y_p particulare a ecuație neomogene observăm că sîntem în cazul de rezonanță $\left(\frac{1}{x} e \text{ rădăcină a ecuației omogene}\right)$, deci vom căuta soluția de forma

$$y_p = \frac{A}{x} \ln^2 x.$$

Înlocuind în ecuația neomogenă obținem $A = \frac{1}{2}$, deci soluția generală a ecuației date este

$$y = \frac{1}{x}\left[C_1 + C_2 \ln x + \frac{1}{2} \ln^2 x \right].$$

2. Ecuația caracteristică $r^2 - 2r + 1 = 0$ are rădăcina dublă $r = 1$. Deci soluția generală a ecuației omogene este $y_0 = x(C_1 + C_2 \ln x)$.

Fie

$$y_p = Ax \ln^2 x + B + \frac{C}{x}.$$

Înlocuind în ecuația neomogenă obținem $A = B = 1$, $C = \frac{1}{4}$, deci

$$y_p = x \ln^2 x + 1 + \frac{1}{4x},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x + x \ln^2 x + 1 + \frac{1}{4x}., \; x > 0$$

3. Putem proceda ca și în cazurile 1 și 2. O altă metodă este următoarea:

Facem schimbarea de variabilă $x = e^t$ și ecuația devine o ecuație cu coeficienți constanți:

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t^3 e^{-t}.$$

Ecuația omogenă $y'' - 2y' + y = 0$ are soluția

$$y_0 = C_1 e^t + C_2 t e^t,$$

iar pentru ecuația neomogenă căutăm o soluție particulară de forma

$$y_p = (At^3 + Bt^2 + Ct + D) e^{-t}.$$

Înlocuind în ecuație obținem $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{3}{4}$, $C = \frac{9}{8}$, $D = \frac{3}{4}$, deci

$$y_p = \frac{1}{4}\left[t^3 + 3t^2 + \frac{9}{2}t + 3\right] e^{-t},$$

de unde soluția generală a ecuației date:

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x + \frac{1}{4x}\left[\ln^3 x + 3\ln^2 x + \frac{9}{2}\ln x + 3\right].$$

4. Cu schimbarea de variabilă $x = e^t$ obținem ecuația

$$y'' + (a-1)y' + by = 0,$$

ecuație omogenă cu coeficienți constanți cu soluția

$$y = \begin{cases} C_1 e^{at} + C_2 e^{bt}, & a \neq b \\ e^{at}(C_1 + C_2 t), & a = b \\ e^{\alpha t}[C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)], & a = \alpha + i\beta, \; b = \alpha - i\beta \end{cases}$$

deci

$$y(x) = \begin{cases} C_1 x^a + C_2 x^b, & a \neq b. \\ x^a (C_1 + C_2 \ln x), & a = b, \\ x^\alpha [C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x)], & a = \alpha + i\beta, \; b = \alpha - i\beta. \end{cases}$$

cu $C_1, C_2 = \text{const}$.

Scanned with OKEN Scanner

5.24.1. Ecuația este omogenă în y_1, y', y''. Fie $y' = uy$, deci $y'' = y(u' + u^2)$. Înlocuind în ecuație se obține ecuația liniară

$$x(x+1)^2 u' + 2(x+1)u = x(x+2),$$

cu soluția

$$u = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \left[\ln|x+1| + \frac{6x^2+15x+7}{6(x+1)^3} + C\right], \quad C = \text{const.},$$

iar din $\frac{y}{y'} = u$ se obțin $y = c_1 e^{\int f(x)dx}$, $u = f(x)$.

2. Cu $y' = uy$ (vezi 1) ecuația devine liniară

$$x^2 u' + 2xu = 1.$$

cu soluția

$$u = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2},$$

iar din

$$y' = \left(\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}\right) y'$$

obținem soluția $y = C_1 x e^{-\frac{C}{x}}$, $C, C_1 = \text{const.}$

3. (vezi 1 și 2) $y = C_1\sqrt{x^2 + C}$.

4. Vom considera x funcție și y variabilă, deci ținînd seama că

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \quad y''_{x^2} = \frac{-x''_{y^2}}{x'^3_y}$$

obținem ecuația

$$x''(y^2 + x) - x'^2 - 4yx' - 2(y^2 - x) = 0,$$

în care luînd $y^2 + x = u$ obținem ecuația

$$uu'' - u'^2 = 0,$$

cu soluția $u = C_1 e^{Cy}$, $C, C_1 = \text{const.}$,
deci

$$y^2 + x = C_1 e^{Cy}.$$

5. Ecuația nu conține variabila. În acest caz luăm

$$y'_x = p, \quad y''_{x^2} = p'_y \cdot p,$$

deci ecuația devine

$$yp^2p' - p^3 - p^2 = 0,$$

de unde rezultă

a) $p = 0,\ y' = 0,\ y = C,\ C = \text{const.}$

b) $yp' - p - 1 = 0, \dfrac{dp}{p+1} = \dfrac{dy}{y},\ p + 1 = Cy,$

de unde $p = Cy - 1$ sau $y' = Cy - 1$ deci $Cy - 1 = C_1e^{Cx}$, $C_1, C = \text{const.}$

6. (vezi 5). Cu $y' = p$ obținem $p = 0,\ y = C$ și $2p - (y-1)p' = 0$, de unde $(y-1)^2 = C_p$ sau $(y-1)^2 = Cy'$; de aici rezultă

$$dx = \frac{Cdy}{(y-1)^2}$$

sau

$$x + C_1 = \frac{C}{1-y},\ C, C_1 = \text{const.}$$

Rezultă

$$y = 1 - \frac{C}{x + C_1}.$$

7. Ecuația nu conține funcția. Deci cu $y' = p$ ecuația devine $x^2p'^2 - x^2pp'' = p^2$ ecuație omogenă în p, p', p''. Prin schimbarea de funcție $p' = pu$ ecuația devine:

$$p\left(u' - \frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

de unde rezultă

a) $p = 0,\ y' = 0 \Rightarrow y = C,\ C = \text{const.}$

b) $u' - \dfrac{1}{x^2} = 0,\ u = \dfrac{1}{x} + C_1,\ C_1 = \text{const.}$, deci $\dfrac{p'}{p} = \dfrac{1}{x} + C_1,$

de unde $p = C_2xe^{C_1x}$.

Rezultă

$$y = C_2\int xe^{C_1x}\,dx + C_3 = C_4\,e^{C_1x}(x-1) + C_3,\ C_4 = \frac{C_2}{C_1}.$$

8. Ecuaţia nu conţine funcţia y. Deci punînd $y' = p$ obţinem ecuaţia

$$(1 + p^2)p'' - 3pp'^2 = 0,$$

care pentru $p' = u$ se transformă în ecuaţia

$$u[(1 + p^2)u' - 3up] = 0,$$

de unde rezultă

a) $u = 0$, $p' = 0$, $p = C$, $y' = C$, $y = Cx + C_1$, $C, C_1 = \text{const.}$

b) $(1 + p^2)u' - 3up = 0$, cu soluţia

$u = C_2(1 + p^2)^{3/2}$, $C_2 = \text{const.}$ Deci $p' = C_2(1 + p^2)^{3/2}$

şi

$$p = y' = \pm \frac{C_2 y + C_3}{\sqrt{1 - (C_2 y + C_3)^2}},$$

de unde soluţia generală

$$(C_2 x + C_3)^2 + (C_2 y + C_3)^2 = 1.$$

5.25.1. Scriem ecuaţia sub forma

$$(y'' + y)' + (3x + 2)(y'' + y) = 0.$$

Cu $y'' + y = u$ ecuaţia devine

$$u' + (3x + 2)u = 0$$

cu soluţia

$$u = Ce^{-(3x+2)}, \quad C = \text{const.},$$

deci

$$y'' + y = Ce^{-(3x+2)},$$

care este o ecuaţie cu coeficienţi constanţi şi are soluţia generală

$$y = C_1 \cos 1^0 + C_2 \sin 1^0 + (C - 3)\, e^{-3x-2}, \quad C, C_1, C_2 = \text{const.}$$

2. Ecuaţia omogenă se scrie

$$(x - 1)y'' - (xy' - y) = 0,$$

iar cu $xy' - y = 0$ ecuaţia devine

$$\frac{x - 1}{x} u' - u = 0,$$

cu soluţia

$$u = C_1(x-1)\,e^x,$$

deci

$$xy' - y = C_1(x-1)e^x,$$

ecuaţie liniară neomogenă cu soluţia

$$y_0 = x\left[\frac{e^x}{x}C_1 + C_2\right].$$

Pentru ecuaţia neomogenă căutăm o soluţie particulară de forma

$$y_p = ax^2 + bx + c.$$

Înlocuind în ecuaţie şi identificînd obţinem $a = -1$, $b = c = 0$, deci $y_p = -x^2$.

Rezultă $y = -x^2 + x\left[\frac{e^x}{x}C_1 + C_2\right]$.

3. Ecuaţia se scrie

$$(y' - 2y)' - a^2(y' - 2y) = \sin x,$$

cu $y' - 2y = u$ obţinem ecuaţia cu coeficienţi constanţi

$$u'' - a^2u = \sin x,$$

cu soluţia generală

$$u = \begin{cases} C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + \dfrac{\sin x}{a^2-1}, & a^2 \neq 1 \\ C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \dfrac{x-1}{2}\cos x, & a^2 = 1. \end{cases}$$

Din $y' - 2y = u$ obţinem

$$y = \begin{cases} Ce^{2x} + k_1 e^{ax} + k_2 e^{-ax} + \dfrac{2\sin x + \cos x}{3(a^2-1)}, & a^2 \neq 1 \\ Ce^{2x} + k_1 e^x + k_2 e^{-x} - \dfrac{x+1}{2}e^x - \dfrac{3x+1}{36}e^{-x}, & a^2 = 1. \end{cases}$$

4. Cunoscînd o soluţie particulară $y_1 = x$ putem reduce ordinul ecuaţiei luînd $y = xz$. Obţinem ecuaţia

$$x(1+x^3)z'' + (2-x^3)z' = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

sau cu $z' = v$

$$x(1 + x^3)\, v' + (2 - x^3)\, v = 0,$$

cu soluţia

$$v = Cx^{-2}(1 + x^3),$$

deci

$$z' = \frac{C(1 + x^3)}{x^2};$$

de unde

$$z = \frac{Cx^2}{2} - \frac{C}{2x} + C_1,$$

iar

$$y = C\frac{x^3}{2} - \frac{C}{2} + C_1 x.$$

5. Vom integra ecuaţia cu ajutorul seriilor căutînd o soluţie de forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n. \tag{1}$$

Avem

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n,\ y'' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{n!} x^n;\ y''' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+3}}{n!} x^n.$$

Înlocuind în ecuaţie şi identificînd obţinem relaţia de recurenţă

$$a_{n+2} = a_n - n^2 a_{n+1}. \tag{2}$$

Soluţia (1) cu coeficienţii daţi de (2) este valabilă pentru $x \in R$.

6. Vom căuta soluţii de forma

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (r + k) x^{r+k-2},\quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (r + k)(r + k - 1) x^{r+k-2}.$$

Înlocuind în ecuaţie, în identitatea obţinută anulăm coeficientul lui x la puterea cea mai mică $(r - 2)$ $(a_0 \neq 0)$ şi obţinem relaţia $r(r - 2) = 0$. Deci pentru $r = 0$ şi $r = 2$

Scanned with OKEN Scanner

vom obține două soluții particulare a ecuației date. Identificînd obținem relația de recurență

$$4a_{n-3} = (n^2 - 1)\ a_{n+1},\ a_0 = 1,\ a_2 \neq 0,\ a_{2n+1} = 0$$

și soluțiile particulare:

$$r = 0;\ y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x^2$$

$$r = 2,\ y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} x^2.$$

5.26.1. Ecuația se transformă în

$$x^2 u'' + u = 0,$$

ecuație de tip Euler cu soluția

$$u = \sqrt{x}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right)\right],$$

deci

$$y = \sqrt{x} e^{-x^2}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right)\right].$$

2. Cu schimbarea de variabilă și funcție dată ecuația se transformă într-o ecuație cu coeficienți constanți

$$u'' + au = 0,$$

cu soluția

$$u = \begin{cases} C_1 \cos(\sqrt{a}\, t) + C_2 \sin(\sqrt{a}\, t), & a > 0 \\ C_1 e^{\sqrt{-a}\, t} + C_2 e^{-\sqrt{-a}\, t}, & a < 0. \end{cases}$$

3. Ecuația se transformă într-o ecuație cu coeficienți constanți

$$4u'' - 2au' + bu = 0,$$

cu soluția generală

$$u = \begin{cases} C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \text{ dacă } a^2 - 4b > 0,\ r_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{4} \\ e^{\frac{a}{4} t}(C_1 + C_2), \text{ dacă } a^2 = 4b, \\ e^{\alpha t}[C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)],\ a^2 < 4b,\ r_1 = \alpha + i\beta, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad r_2 = \alpha - i\beta. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

5.27. Avem

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)\, a_k\, x^{r+k-1},\quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k\, x^{r+k-2}$$

și introducînd în ecuație se obține relația

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(r+k)^2 - \nu^2]\, a_k\, x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^{k+2} = 0,$$

iar pentru identificare

$$a_0 (r^2 - \nu^2) = 0$$

$$a_1[(r+1)^2 - \nu^2] = 0$$

$$a_k[(r+k)^2 - \nu^2] = -a_{k-2},\ k = 2, 3, \ldots$$

Fie $a_0 \neq 0$, deci $r = \pm\nu$

Pentru $r = \nu$ obținem relația

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p} \cdot p\,!\,(\nu+1)\ldots(\nu+p)} = \frac{(-1)^p a_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2p} \cdot p\,!\,\Gamma(\nu+p+1)}.$$

și soluția

$$y_1 = a_0 \Gamma(\nu+1) \cdot \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{\nu+2p}}{2^{2p} \cdot p\,!\,\Gamma(\nu+p+1)}.$$

Fie $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+2)}$, deci

$$y_1 = I_\nu = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\nu}}{p\,!\,\Gamma(\nu+p+1)}.$$

Pentru $r = -\nu$ se obține

$$y_2 = I_{-\nu} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\nu}}{p\,!\,\Gamma(p-\nu+1)}.$$

Dacă $\nu \neq n$ întreg I_ν și $I_{-\nu}$ sînt liniar independente și soluția generală a ecuației date este

$$y = C_1 I_\nu + C_2 I_{-\nu},\ C_1, C_2 = \text{const.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\nu = n$, funcţiile I_n şi I_{-n} nu sînt liniar independente deoarece

$$I_n = (-1)^n I_n,$$

deci pentru a obţine soluţia generală a ecuaţiei date trebuie să construim o soluţie liniar independentă de $I_n(x)$. O soluţie cu această proprietate este funcţia lui Bessel de speţa a doua

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{I_\nu(x)\cos \nu\pi - I_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu},$$

iar soluţia generală a ecuaţiei date va fi în acest caz

$$y = C_1 I_n(x) + C_2 Y_n(x).$$

5.28. Vom face o schimbare de variabilă şi de funcţie

$$x = t^\alpha, \quad y = t^\beta z(t)$$

şi vom determina α şi β aşa încît noua ecuaţie să fie ecuaţia lui Bessel.

Avem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\alpha} t^{\beta-\alpha+1} \frac{dz}{dt} + \frac{\beta}{\alpha} t^{\beta-\alpha} z,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\alpha^2} t^{\beta-2\alpha+2} \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2\beta-\alpha+1}{\alpha^2} t^{\beta-2\alpha+1} \frac{dz}{dt} +$$

$$+ \frac{\beta(\beta-\alpha)}{\alpha^2} t^{\beta-2\alpha} z,$$

iar ecuaţia dată devine

$$t^2 z'' + (2\beta - \alpha + 1) t z' + z[\alpha^2 t^{2\alpha} + \alpha^2 \beta(\beta - \alpha)] = 0.$$

Punînd condiţia ca această ecuaţie să fie forma canonică a ecuaţiei Bessel, avem :

$$2\beta - \alpha + 1 = 1, \quad \alpha = 1, \quad \alpha^2 \beta(\beta - \alpha) = -\nu^2.$$

Rezultă $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\nu^2 = \frac{1}{4}$,

deci

$$z(t) = C_1 I_{\frac{1}{2}}(t) + C_2 I_{-\frac{1}{2}}(t),$$

Scanned with OKEN Scanner

iar

$$y = \sqrt{x}\,[C_1 I_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 I_{-\frac{1}{2}}(x)].$$

Ţinînd seama că

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \text{ şi } I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,$$

rezultă

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi}}[C_1 \sin x + C_2 \cos x] = k_1 \sin x + k_2 \cos x.$$

2. Vom face schimbarea de variabilă $x = t^\alpha$. Ecuaţia devine

$$t^2 y'' + ty' - \alpha^2 (t^\alpha + \nu^2)\, y = 0.$$

Pentru $\alpha = 2$ avem

$$t^2 y'' + ty' + [(2it)^2 - 4\nu^2]\, y = 0,$$

iar cu schimbarea de variabilă $2it = u$ obţinem forma canonică, deci

$$y(t) = C_1 I_{2\nu}(2it) + C_2 Y_{2\nu}(2it),$$

iar

$$y(x) = C_1 I_{2\nu}(2i\sqrt{x}) + C_2 Y_{2\nu}(2i\sqrt{x}).$$

3. Vom face numai schimbarea de funcţie $y = x^\beta z$ (în paranteza $[ax^2 + b(b-1]y$ variabila este deja la pătrat).

Avem

$$y' = \beta x^{\beta-1} z + x^\beta z';\ y'' = x^\beta z'' + 2\beta x^{\beta-1} z' + \beta(\beta-1) x^{\beta-2} z,$$

iar ecuaţia devine

$$x^2 z'' + 2\beta x z' + [-ax^2 - b(b-1) + \beta(\beta-1)]\, z = 0,$$

rezultă

$$2\beta = 1,\ b(b-1) + \beta(\beta-1) = \nu^2,$$

de unde

$$\beta = \frac{1}{2},\quad \nu^2 = \left(b - \frac{1}{2}\right)^2,$$

deci

$$z = C_1 I_{b-\frac{1}{2}}(i\sqrt{a}\,x) + C_2\, Y_{b-\frac{1}{2}}(i\sqrt{ax}),$$

iar

$$y = \sqrt{x}\,[C_1 I_{b-\frac{1}{2}}(i\sqrt{a}x) + C_2\, Y_{b-\frac{1}{2}}(i\sqrt{a}\,x].$$

4. Luînd $e^{2x} = t^2$ obţinem ecuaţia

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)\, y = 0,$$

deci

$$y = C_1 I_\nu(e^x) + C_2 Y_\nu(e^x).$$

5. Cu $y = x^\beta z$ obţinem ecuaţia

$$x^2 z'' + 2\beta x z' + [a^2 x^2 - 6 + \beta(\beta - 1)]z = 0,$$

deci $\beta = \dfrac{1}{2}$ ecuaţia devine

$$x^2 z'' + xz' + \left(a^2 x^2 - \frac{25}{4}\right) z = 0,$$

cu soluţia

$$z = C_1 I_{\frac{5}{2}}(ax) + C_2 I_{-\frac{5}{2}}(ax),$$

deci

$$y = \sqrt{x}[C_1 I_{\frac{5}{2}}(ax) + C_2 I_{-\frac{5}{2}}(ax)].$$

6. Cu schimbarea de funcţie $y = \sqrt{x}z$ obţinem ecuaţia

$$x^2 z'' + xz' + \left(x^3 - \frac{1}{4}\right) z = 0,$$

iar cu schimbarea de variabilă $t = \dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ obţinem forma canonică a ecuaţiei Bessel.

Rezultă

$$y = \sqrt{x}\left[C_1 I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right) + C_2 I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)\right].$$

5.29.1. Din prima ecuaţie avem

$$z = y' + 2x + e^x,$$

Scanned with OKEN Scanner

care înlocuit în ecuația a doua ne dă

$$y''' - y'' - y' + y = 0,$$

cu soluția

$$y = C_1e^{-x} + (C_2 + C_3x)e^x,$$

deci

$$z = C_1e^{-x} + (3C_2 + C_3 + 1 + 3C_3x)e^x,\ C_{1,2,3} = \text{const.}$$

2. Eliminînd pe u obținem

$$\begin{cases} y' + z' + y - 2z = 0 \\ 2y'' - y' - z' - 3y + 2z = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Eliminînd pe z' se obține ecuația

$$y'' - y = 0,$$

cu soluția

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x},\ C_1, C_2 = \text{const.},$$

care înlocuită în prima ecuație din (1) dă ecuația

$$z' - 2z = -2C_1e^x,$$

cu soluția

$$z = C_3e^{2x} + 2C_1e^x,\quad C_3 = \text{const.}$$

Din prima ecuație a sistemului dat obținem acum

$$u = C_1e^x - C_2e^{-x} - C_3e^{2x}.$$

Metoda a doua: căutăm soluții de forma $y = Ae^{rx}$ (sistemul fiind liniar cu coeficienți constanți), $z = Be^{rx}$, $u = Ce^{rx}$. Introducînd în sistem obținem

$$\begin{aligned} (2r + 1)A - B - C &= 0 \\ A + (2r - 3)B + C &= 0 \\ -2A + B + (2r - 1)C &= 0, \end{aligned}$$

de unde

$$D(r) = \begin{vmatrix} 2r+1 & -1 & -1 \\ 1 & 2r-3 & 1 \\ -2 & 1 & r-1 \end{vmatrix} = (r - 2)(r^2 - 1).$$

Pentru $r = -1$ avem $B_1 = 0$, $A_1 = -C_1$.
Pentru $r = 1$ avem $A_2 = C_2$, $B_2 = 2C_2 = 2A_2$.
Pentru $r = 2$ avem $A_3 = 0$, $B_3 = -C_3$.

Soluţia generală va fi:

$$\begin{cases} y = A_1 e^{-x} + A_2 e^{x} \\ z = 2A_2 e^{x} + B_3 e^{2x} \\ u = -A_1 e^{-x} + A_2 e^{x} - B_3 e^{2x}. \end{cases}$$

3. Căutînd o soluţie particulară pentru sistemul omogen (sistem liniar cu coeficienţi constanţi)

$$\begin{aligned} y' + 4u &= 0 \\ z' - u &= 0 \\ u' + 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

(vezi ex. 1 şi 2) găsim

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} C_1 - 4C_2 e^{3x} - 4c_3 e^{-3x} \\ z &= C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x} \\ u &= 3C_2 e^{3x} - 3C_3 e^{-3x}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Pentru calculul soluţiei sistemului neomogen folosim metoda variaţiei constantelor. Derivînd (1) unde considerăm $C_i (i = 1, 2, 3)$ ca funcţii de x şi introducînd în sistemul neomogen obţinem:

$$\begin{aligned} C_1' - 8e^{3x} C_2' - 8e^{-3x} C_3' &= 2(3x + 1) \\ C_1' + e^{3x} C_2' + e^{-3x} C_3' &= x^2 \\ e^{3x} C_2' - e^{-3x} C_3' &= 0, \end{aligned}$$

de unde

$$C_1' = \frac{1}{9}(8x^2 + 6x + 2), \quad C_2' = \frac{e^{-3x}}{18}(x^2 - 6x - 2),$$

$$C_3^1 = \frac{e^{3x}}{18}(x^2 - 6x - 2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Integrînd rezultă

$$C_1 = \frac{x}{27}(8x^2 + 9x + 6) + k_1,$$

$$C_2 = \frac{e^{-3x}}{54}\left(-x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{34}{9}\right) + k_2,$$

$$C_3 = \frac{e^{3x}}{54}\left(x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{2}{9}\right) + k_3,\ k_i = \text{const.},\ i = 1, 2, 3,$$

care înlocuite în (1) ne dau soluția generală a sistemului.

4. (vezi 3 pentru rezolvare)

$$x = \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{16}e^{2x} - \frac{2x+1}{8}e^{-2x} + C_1 + C_2x + C_3e^{-2x}$$

$$y = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{2x+1}{4}e^{-2x} - 2C_3e^{-2x} + C_4.$$

5. Sistemul este de tip Euler. Căutînd soluții de forma

$$y = Ax^r,\ z = Bx^r,$$

obținem

$$A(r-3) - 2B(r-2) = 0$$
$$A(r-2) + B(r-3) = 0,$$

de unde

$$\begin{vmatrix} r-3 & r-2 \\ r-2 & r-3 \end{vmatrix} = 0, \text{ de unde } r_{1,2} = \frac{7}{3} \pm i\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Soluția generală va fi

$$y_0 = x^2\sqrt[3]{x}\left[A_1\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\ln x\right) + A_2\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\ln x\right)\right],$$

$$z_0 = x^2\sqrt[3]{x}\left[B_1\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\ln x\right) + B_2\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\ln x\right)\right].$$

Din condiția ca y_0 și z_0 să verifice sistemul dat se obține

$$B_1 = \frac{2}{3}A_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}A_2,\ B_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}A_1,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci soluția generală a sistemului va fi

$$y = x^2\sqrt[3]{x}\left[A_1\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\ln x\right) + A_2\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\ln x\right)\right],$$

$$z = x^2\sqrt[3]{x}\left[\left(\frac{2}{3}A_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}A_2\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\ln x\right) + \frac{\sqrt{2}}{6}A_1\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\ln x\right)\right].$$

6. Scăzînd din ecuația a doua prima ecuație obținem

$$(z' - y') - (z - y) = 0,$$

de unde rezultă

$$z - y = C_1e^x + 2.$$

Din prima ecuație a sistemului avem

$$y = \frac{1}{3}(x - 1) + \frac{C_2}{(x - 1)^2},$$

deci

$$z = \frac{1}{3}(x - 1) + 2 + C_1e^x + \frac{C_2}{(x - 1)^2},\ C_1,\ C_2 = \text{const.}$$

7. Căutînd soluții de forma $y = A_1e^{rx}$, $z = A_2e^{rx}$, $u = A_3e^{rx}$ pentru sistemul omogen obținem

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} r + 9 & 12 & 5 \\ -5 & r - 6 & -3 \\ 1 & 4 & 1 - r \end{vmatrix} = -(r - 1)(r + 2)^2.$$

Scriind că pentru $r = 2$ sistemul are soluția

$$y = A_1e^{2x},\ z = A_2e^{2x},\ u = A_3e^{2x}$$

obținem

$$A_1 = -2B_1,\ C_1 = 2B_1.$$

Scriind că pentru $r = 2$ (răd. dublă a ec. caracteristice) sistemul este verificat de soluțiile:

$$y = (A_2x + A_3)e^{-2x},\ z = (B_2x + B_3)e^{-2x},$$
$$u = (C_2x + C_3)e^{-2x},$$

găsim

$$A_2 = -B_2,\ C_2 = A_2,\ A_3 = C_3 - A_2,\ B_3 = -C_3 + \frac{A_2}{2},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci soluția sistemului omogen va fi

$$y_0 = -2B_1e^{2x} + (A_2x + C_3 - A_2)e^{-2x},$$

$$z_0 = B_1e^{2x} + \left(-A_2x - C_3 + \frac{A_2}{2}\right)e^{-2x},$$

$$u_0 = 2B_1e^{2x} + (A_2x + C_3)e^{-2x}.$$

Pentru sistemul neomogen căutăm o soluție particulară de forma

$$y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

$$z_p = a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1,$$

$$u_p = a_2x^2 + b_2x + c_2.$$

Am ținut seama de faptul că dacă membrii doi ai sistemului sînt polinoame de grad cel mult m și dacă α este o rădăcină a ecuației caracteristice a sistemului omogen multiplă de ordin p, atunci căutăm soluții particulare — polinoame de grad $m+p$.

Prin identificare găsim

$$y_p = x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{9}{16}$$

$$z_p = \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{5}{16}$$

$$u_p = -3x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{17}{16},$$

iar soluția generală a sistemului va fi

$$y = y_0 + y_p,\ z = z_0 + z_p,\ u = u_0 + u_p.$$

5.30.1. Din ecuația a doua avem $y = xz' - 4z - \cos(\ln x)$, care înlocuită în prima ne dă ecuația de tip Euler

$$x^2z'' - xz' - 11z = 2\cos(\ln x),$$

care cu substituția $x = e^t$ devine ecuație cu coeficienți constanți

$$z'' - 2z' - 11z = 2\cos t.$$

Soluție generală a ecuației omogene este

$$z(t) = C_1e^{(1+2\sqrt{3})t} + C_2e^{(1-2\sqrt{3})t}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar pentru ecuația neomogenă căutînd o soluție particulară de forma

$$z_p = A\cos t + B\sin t$$

obținem $A = -\frac{6}{37}$, $B = -\frac{1}{37}$, deci soluția generală a ecuației neomogene este

$$z(t) = C_1 e^{(1+2\sqrt{3})t} + C_2 e^{(1-2\sqrt{3})t} - \frac{1}{37}(6\cos t + \sin t),$$

de unde

$$z(x) = C_1 x^{1+2\sqrt{3}} + C_2 x^{1-2\sqrt{3}} - \frac{1}{37}[6\cos(\ln x) + \sin(\ln x)].$$

Din $y = xz' - 4z - \cos(\ln x)$ se obține

$$y(x) = (2\sqrt{3} - 3)C_1 x^{1+2\sqrt{3}} - (2\sqrt{3} + 3)C_2 x^{1-2\sqrt{3}} + \\ + \frac{2}{37}[5\sin(\ln x) - 7\cos(\ln x)].$$

Din condițiile inițiale obținem

$$\begin{cases} (2\sqrt{3} - 3)C_1 - (2\sqrt{3} + 3)C_2 = 1 \\ C_1 + C_2 = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

de unde

$$C_1 = \frac{1}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{24}, \quad C_2 = \frac{1}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{24},$$

deci soluția problemei Cauchy este

$$y = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)x^{1+2\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)x^{1-2\sqrt{3}} + \\ + \frac{2}{37}[5\sin(\ln x) - 7\cos(\ln x)],$$

$$z = \left(\frac{1}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{24}\right)x^{1+2\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{24}\right)x^{1-2\sqrt{3}} - \\ - \frac{1}{37}[6\cos(\ln x) + \sin(\ln x)].$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Putem utiliza metoda de la 1. Vom rezolva însă acest sistem cu ajutorul matricelor și anume: dacă $Y' = AY + B$ (1) este sistemul neomogen cu B — matricea coloană a termenilor liberi; metoda variației constantelor cere determinarea unei soluții de forma $Y = Y_0C$, unde Y_0 este o matrice fundamentală a sistemului omogen, iar C o matrice variabilă nedeterminată. Ecuația (1) devine $Y_0C' = B$, de unde $C' = Y_0^{-1}B$, de unde prin integrare se deduce C, iar $Y = Y_0C$.

În cazul nostru sistemul omogen

$$xy' + y - 2z = 0$$
$$xz' + 3y - 4z = 0$$

are soluția fundamentală

$$Y_0 = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ x & \frac{2}{3}x^2 \end{pmatrix}, \quad Y_0^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3x} & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix},$$

deci

$$C = \frac{1}{3}\int \begin{pmatrix} -\frac{2}{3x} & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x^2 + x + A \\ x + \ln x + B, \end{pmatrix}, \quad A, B = \text{const.}$$

deci

$$Y = Y_0C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}x^3 + x^2(1 + \ln x) + Ax + Bx^2 \\ \frac{1}{3}x^3 + x^2\left(1 + \frac{2}{3}\ln x\right) + Ax + \frac{2}{3}x^2B \end{pmatrix}.$$

Pentru condițiile impuse găsim

$$A = \frac{5e}{3 - 2e}, \quad B = \frac{5e}{2e - 3},$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Sistemul omogen

$$y' + z + u = 0$$
$$z' + y - z = 0$$
$$u' - y - u = 0$$

are soluţia fundamentală

$$Y_0 = \begin{pmatrix} e^x & 1 & 0 \\ xe^x & -1 & e^x \\ (1-x)e^x & 1 & -e^x \end{pmatrix}; \quad Y_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-x} & e^{-x} \\ 1 & -1 & -1 \\ e^{-x} & -xe^{-x} & -(1+x)e^{-x} \end{pmatrix},$$

deci

$$C = \int \begin{pmatrix} e^{-x} + x \\ e^x(1-x) - 1 \\ 1 - x - x^2 - xe^x \end{pmatrix} dx =$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{-x} + \frac{x^2}{2} + A_1 \\ (2-x)e^x - x + A_2 \\ x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + (1+x)e^{-x} + A_3 \end{pmatrix},$$

$A_1, A_2, A_3 = \text{const.}$

Rezultă

$$Y = Y_0 C =$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 e^x + A_2 + \left(\frac{x^2}{2} - x + 2\right)e^x - x + 1 \\ (A_1 - A_3)e^x + A_2 + \left(\frac{5}{6}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x - 2\right)e^x + x + 1 \\ A_1(1-x)e^x + A_2 - A_3 e^x + \left(x^2 - \frac{x^3}{6} - 2x + 2\right)e^x - x - 2 \end{pmatrix}.$$

Condiţiile $y(0) = 1$, $z(0) = -1$, $u(0) = -2$ ne dau

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

4. Prima ecuație a sistemului integrată ne dă

$$y = x + C_1x^2, \quad C_1 = \text{const.}$$

soluție care introdusă în ecuația a doua ne dă ecuația diferențială

$$xz' - z = -C_1.$$

cu soluția

$$z = C_1 + C_2x, \quad C_2 = \text{const.}$$

Înlocuind în ultima ecuație pe y și z determinați găsim

$$u = C_1x^{-1} + C_2 + C_3x, \quad C_i = \text{const.} \ (i = 1, 2, 3)$$

Condițiile inițiale ne dau $C_1 = -1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 0$, deci soluția problemei Cauchy este

$$y = x - x^2, \ z = x - 1, \ u = -\frac{1}{x} + 1.$$

5.31.1. Din primele două rapoarte simplificate

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$$

obținem integrala primă $x^2 - y^2 = C_1$. Scriem apoi sistemul sub forma

$$\frac{\frac{dx}{x}}{y^2} = \frac{\frac{dy}{y}}{x^2} = \frac{\frac{dz}{z}}{x^2 + y^2},$$

de unde rezultă

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

cu integrala primă $z = C_2xy$, $C_2 = \text{const.}$

Integrala generală a sistemului este

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ z = C_2xy. \end{cases}$$

2. Din primele două rapoarte se obține integrala primă

$$\sin x - \sin y = C_1, \quad C_1 = \text{const.},$$

Scanned with OKEN Scanner

iar din utlimele două

$$\sin y - z = C_1, \quad C_1 = \text{const.}$$

3. Primele două rapoarte ne dau integrala primă

$$y = C_1 x, \quad C_1 = \text{const.}$$

Din

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z + a\sqrt{(C_1^2 + 1)x^2 + z^2}}$$

prin integrare obținem

$$z + \sqrt{z^2 + (C_1^2 + 1)x^2} = C_2 x^{a+1}, \quad C_2 = \text{const.}$$

4. Ultimele două rapoarte ne dau

$$y + z = C_1,$$

iar din primul și ultimul ținînd seama de integrala primă obținută rezultă $z + (x + y + z)\ln(x + y + z) = C_2$.

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE

Fie $F : \Omega \subset R^{2n+1} \to R$. Se numește *ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi* definită de F problema găsirii tuturor funcțiilor $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ care verifică relația

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (1)$$

Ecuația liniară generală are forma:

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} - U = 0, \quad (2)$$

unde $X_1, X_2, \ldots, X_n, U$ sînt funcții de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definite într-un domeniu $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ și cu derivate parțiale continue în acest domeniu.

Soluțiile ecuației (2) se obțin egalînd cu zero o funcție arbitrară de n integrale prime distincte ale sistemului diferențial asociat (*sistem caracteristic*)

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{U} \quad (3)$$

unde U și X_i satisfac condițiile $U \neq 0$ și $X_i \neq 0$, $(i = 1,2 \ldots, n)$.

Fie ecuația (2) pentru $n = 1, 2$. Soluțiile $u = \varphi(x, y)$ reprezintă suprafețe în spațiul cu trei dimensiuni numite *suprafețe integrale*.

Scanned with OKEN Scanner

Problema lui Cauchy constă în determinarea soluției $u = \varphi(x, y)$ care trece printr-o curbă dată (C). Dacă (C) nu este o caracteristică, soluția este unic determinată fiind suprafața generată de caracteristicile care intersectează curba (C). Dacă (C) este o caracteristică, soluția este nedeterminată deoarece prin (C) trec o infinitate de suprafețe integrale.

Ecuații neliniare. Fie ecuația

$$F(x, y, u, p, q) = 0, p = \frac{\partial u}{\partial x}, q = \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{4}$$

unde F are derivate parțiale de ordinul al doilea continue. Soluțiile ecuației (4), care depind de două constante arbitrare independente se numesc *integrale complete*. Ele sînt date de relații de forma $V(x, y, u, a, b) = 0$.

Metoda Lagrange — Charpit constă în determinarea integralei complete ca soluție a unei ecuații cu diferențiale totale, sau (ceea ce este echivalent) a unui sistem de două ecuații cu derivate parțiale:

$$\begin{cases} F(x, y, u, p, q) = 0 \\ G(x, y, u, p, q) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

așa încît să conțină o constantă arbitrară a și sistemul să fie complet integrabil.

O ecuație cu *derivate parțiale de ordinul al doilea* cu două variabile independente este de forma

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0, \tag{6}$$

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, q = \frac{\partial u}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

iar F este o funcție definită și continuă într-un domeniu din spațiul cu opt dimensiuni.

Numim *soluție* sau *integrală* a ecuației (6) o funcție de clasă C^2, $u = u(x, y)$ care înlocuită, împreună cu derivatele sale pînă la ordinul al doilea, în (6) să o reducă la o identitate.

A rezolva problema Cauchy pentru ecuația (6) înseamnă a determina o soluție a ei care să verifice condițiile:

$$u(0, y) = \varphi(y), \left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi(y). \tag{7}$$

unde $\varphi(y)$ și $\psi(y)$ sînt funcții date de o clasă convenabilă într-un domeniu care conține originea.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia $r = f(x, y, u, p, q, r, s)$ admite o singură soluţie analitică care satisface condiţiile (7), dacă f, φ şi ψ sînt funcţii analitice de variabilele lor.

Există o suprafaţă olomorfă unică a ecuaţiei (6) care este tangentă la suprafaţa desfăşurabilă analitică, definită de

$$p(x_0, y) = \psi(y), \quad q(x_0, y) = \varphi'(y) \tag{8}$$

de-a lungul curbei (Γ) de ecuaţii $x = x_0$, $u = \varphi(y)$ (dacă ecuaţia cu derivate parţiale (6) a fost rezolvată în raport cu r).

Numim *curbe caracteristice* pentru ecuaţia (6) curbele aflate pe suprafeţele integrale ale ecuaţiei ale căror proiecţii în planul (xOy) verifică ecuaţia caracteristicelor

$$\frac{\partial F}{\partial r} y'^2 - \frac{\partial F}{\partial s} y' + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

De-a lungul caracteristicilor problema lui Cauchy nu se poate rezolva prin teorema de existenţă.

Ecuaţii cvasiliniare :

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y, u, p, q) = 0, \tag{9}$$

unde A, B, C sînt funcţii reale, continue, derivabile ne- nule în acelaşi timp în domeniul considerat.

1. dacă $B^2 - AC > 0$, ecuaţia este de tip hiperbolic.
2. Dacă $B^2 - AC = 0$, ecuaţia este de tip parabolic.
3. Dacă $B^2 - AC < 0$, ecuaţia este de tip eliptic.

Proiecţiile caracteristicilor pe planul xOy sînt date de ecuaţia

$$A(x, y)\, dy^2 - 2B(x, y)\, dx\, dy + C(x, y)\, dx^2 = 0. \tag{10}$$

Direcţiile

$$\frac{dy}{dx} = \mu_1(x, y); \quad \frac{dy}{dx} = \mu_2(x, y)$$

date de ecuaţia (10) se numesc *direcţii caracteristice*, iar soluţiile acestui sistem

$$\varphi_1(x, y) = C_1, \quad \varphi_2(x, y) = C_2, \quad (C_1, C_2 = \text{const.})$$

sînt *proiecţiile* pe planul (xOy) *a curbelor caracteristice.*

1. Dacă $B^2 - AC > 0$ prin schimbarea de variabile

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y)$$

Scanned with OKEN Scanner

ecuația (9) se reduce la forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} + G\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

2. Dacă $B^2 - AC = 0$, $(\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) = \varphi(x, y))$ prin schimbarea de variabile

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = x$$

se ajunge la forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + G_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

3. Dacă $B^2 - AC < 0$ avem $\varphi_1(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ și $\varphi_2(x, y) = \alpha(x, y) - i\beta(x, y)$. Prin schimbarea de variabile

$$\xi = \alpha(x, y), \quad \eta = \beta(x, y)$$

se ajunge la forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + G_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Problema lui Dirichret constă în determinarea unei funcții armonice $u(P)$, $(\Delta u = 0)$ în domeniul Ω, continuă în domeniul închis $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ și care pe (Γ) ia valori date $u|_\Gamma = f(x, y)$.

Problema lui Neumann constă în determinarea unei funcții $u(P)$ armonice în Ω, de clasă C^2 în $\overline{\Omega}$ și care pe (Γ) satisface condiția $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = f(x, y)$ unde $f(x, y)$ este o funcție continuă dată, iar n este normala exterioară la (Γ).

PROBLEME

6.1. Să se determine suprafețele integrale ale ecuațiilor ce trec prin curbele date:

1. $xy^2 \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial u}{\partial y} - u(x^2 + y^2) = 0$;

$x = 2y, u = C, C = \text{const.}$

2. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+x^2+y^2-1-u=0;$

$$x-u=a^2;\ x^2+y^2=a^2-1,\ a\in R.$$

3. $xu\dfrac{\partial u}{\partial x}+yu\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2+y^2+u^2;$

$$u=y^2,\ x=1.$$

4. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u-x^2\sin y,$

$$x=y^2,\ u=0.$$

5. $\operatorname{ch}x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\operatorname{sh}x\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u}{2}\operatorname{sh}x,$

$$u=0,\ y=a\operatorname{ch}x.$$

6.2. Să se determine integralele complete pentru ecuațiile:

1. $pq-z=0.$ $\left(p=\dfrac{\partial z}{\partial x},\ q=\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$
2. $p^2-q^2+z=0.$
3. $xp+yq+zpq=0.$
4. $z(xp+yq)+xypq=0.$
5. $(z-px-qy)^2+pq=0.$
6. $p^2+2px-y^2q+(x-1)^2=0.$

6.3. Să se determine integrala generală a ecuației

$$(px+qy)^2-2(py-qx)+2\varphi(z)=0,$$

iar pentru $\varphi(z)=z$ să se scrie ecuația conului lui Monge în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

6.4. Să se determine soluția ecuației

$$p^2+q^2-z=0$$

care trece prin curba $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=1.$

6.5. Să se determine suprafața integrală a ecuației

$$px+qy-pq+z=0$$

care trece prin curba $x=0,\ y=\tau,\ z=\tau.$

Scanned with OKEN Scanner

6.6. Să se rezolve problema lui Cauchy pentru ecuația:

$$x(p^2 + q^2) - (x^2 + y^2)\, p + zx = 0,$$
$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 0.$$

6.7. Să se reducă la forma canonică ecuațiile:

1. $(1 + x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

2. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{y^2 u}{\partial y^2} = 0.$

3. $(l^2 - x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{4}u = 0,\ 0 < x < l.$

4. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

5. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

6. $y^m\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

6.8. Să se determine integrala generală a ecuațiilor:

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{2}{x-y}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{3}{x-y}\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{3u}{(x-y)^2} = 0.$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{a}{x-y}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a}{x-y}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{a - a^2}{(x-y)^2}u = 0,$

4. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 3y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + (1 - xy)u = 0.$

6.9. Să se rezolve problema lui Cauchy pentru ecuația:

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;\ u(x, 0) = x^3,\ u'_y(x, 0) = 2x^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.10. Să se determine soluția ecuației

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

definită prin condițiile $u|_{y=1} = x^2, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = x.$

6.11. Utilizînd metoda lui Riemann să se rezolve problema lui Cauchy pentru ecuațiile:

1. $y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;$

$$u(x, y)|_{y=1} = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = g(x).$$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u = 0;$

$$u(x, t)|_{t=0} = f(x); \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x).$$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x - 1) \frac{\partial u}{\partial y} + (x + 1) \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 - 1) u = 0;$

$$u(x, y)|_c = x + 1; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_c = x - 1.$$

6.12. Un fir omogen de lungime l este fixat la una din extremități și se află într-o poziție de echilibru vertical sub acțiunea greutății sale. Să se determine deplasarea u a unui punct de abscisă x la o oscilație de amplitudine mică a firului în condițiile $u(x, t)|_{t=0} = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x).$ [17].

6.13. Extremitățile unei bare omogene de lungime l izolată de mediul exterior sînt menținute la o temperatură constantă $u = 0$.

1. Cunoscînd distribuția inițială a temperaturilor de-a lungul barei să se determine temperatura la momentul t.

2. Aceeași problemă în ipoteza că la extremitatea $x = 0$ bara are o temperatură nulă, iar la cealaltă extremitate are loc

Scanned with OKEN Scanner

o radiație de căldură în mediul înconjurător a cărui temperatură este considerată nulă.

6.14. Să se determine soluția ecuației

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = a^2 u$$

care satisface condițiile $u(0, t) = \dfrac{1}{10 - 6\cos t}$, $u(x, t + 2\pi) = u(x, t)$.

6.15. Să se determine soluția ecuației oscilațiilor radiale de amplitudine mică (1) ale unei membrane circulare de rază R fixată pe margini:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\sigma}}. \tag{1}$$

6.16. Să se determine distribuția temperaturii într-un cilindru semiinfinit de rază R, suprafața lui fiind menținută la temperatura 0° și avînd la momentul $t = 0$, $u(r, 0) = f(r)$.

6.17. Să se rezolve problema lui Dirichlet pentru coroana circulară $0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ dacă pe frontieră avem $u(r_1, \theta) = f(\theta)$; $u(r_2, \theta) = g(\theta)$.

6.18. Să se determine temperatura staționară în punctele din interiorul unui paralelipiped dreptunghic de muchii l, m, n (trei muchii concurente coincid cu axele de coordonate), dacă în timpul experienței fețele laterale sînt menținute la temperatura 0° [17].

6.19. Să se rezolve problema lui Neumann pentru un cerc C_R de rază R și cu centrul în originea axelor de coordonate. Să se deducă de aici soluția problemei Neumann pentru semiplan.

6.20. Să se integreze ecuația neomogenă

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b, \qquad (a, b = \text{const.})$$

cu condițiile $u|_{t=0} = 0$; $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$; $u|_{x=0} = 0$; $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

6.1.1. Ecuația este cvasiliniară.

Ecuația liniară atașată acestei ecuații este

$$xy^2\frac{\partial v}{\partial x}+x^2y\frac{\partial v}{\partial y}+u(x^2+y^2)\frac{\partial v}{\partial u}=0,$$

iar sistemul caracteristic

$$\frac{\mathrm{d}x}{xy^2}=\frac{\mathrm{d}y}{x^2y}=\frac{\mathrm{d}u}{u(x^2+y^2)}.$$

Din $\dfrac{\mathrm{d}x}{xy^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{x^2y}$ sau $\dfrac{\mathrm{d}x}{y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{x}$ rezultă integrala primă

$$x^2-y^2=C_1, \qquad C_1=\text{const.}$$

Din

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}x}{x}}{y^2}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{y}}{x^2}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}x}{x}+\dfrac{\mathrm{d}y}{y}}{x^2+y^2}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}u}{u}}{x^2+y^2}.$$

rezultă

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

și integrala primă

$$\frac{u}{xy}=C_2, \qquad C_2=\text{const.}$$

Integrala generală a ecuației cvasiliniare date este

$$\varphi\left(x^2-y^2,\ \frac{u}{xy}\right)=0.$$

Eliminînd din sistemul

$$x^2-y^2=C_1,\ xyC_2=u,\ x=2y,\ u=C$$

variabilele x, y, u ajungem la următoarea relație între C_1 și C_2

$$2C_1C_2=3C,$$

Scanned with OKEN Scanner

care ne arată că suprafața integrală căutată este

$$u = \frac{3Cxy}{2(x^2 - y^2)}.$$

2. Sistemul caracteristic corespunzător este

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u - x^2 - y^2 + 1}.$$

Din $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ obținem integrala primă $\frac{x}{y} = C_1$.

Din $\frac{dy}{y} = \frac{du}{u - x^2 - y^2 + 1}$ obținem integrala primă

$$\frac{u + 1 + x^2 + y^2}{y} = C_2.$$

Soluția generală a ecuației va fi

$$u = -(x^2 + y^2) - 1 + yf\left(\frac{x}{y}\right).$$

Din sistemul

$$x - u = a^2,\ x^2 + y^2 = a^2 - 1,\ x = C_1 y,\ x^2 + y^2 + u + 1 = C_2 y,$$

eliminînd pe x, y și u, obținem relația

$$C_1 = C_2,$$

deci suprafața integrală ce trece prin curba dată este

$$x^2 + y^2 + u - x + 1 = 0.$$

3. Sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = \frac{du}{x^2 + y^2 + u^2}$$

ne dă integralele prime

$$\frac{x}{y} = C_1,\quad \frac{u^2}{y^2} - 2\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)\ln y = C_2$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci soluția generală

$$\varphi\left(\frac{x}{y},\ \frac{u^2}{y^2}-2\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)\ln y\right)=0,$$

iar suprafața integrală ce trece prin curba dată este

$$u^2=2y^2\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)\ln x+\frac{y^4}{x^2}.$$

4. $C_1=\frac{x}{y}$, $C_2=\left(-\frac{x^2}{y}\cos y+u\right)\frac{1}{x}$,

soluția generală este

$$u=f\left(\frac{x}{y},\ \frac{x^2}{y}\cos y\right).$$

Din $C_1C_2+\cos C_1=0$ rezultă suprafața integrală ce trece prin curba dată

$$\frac{1}{y}\left(u-\frac{x^2}{y}\cos y\right)+\cos\frac{x}{y}=0.$$

5. Avem

$$\frac{dx}{2\operatorname{ch}x}=\frac{dy}{2y\operatorname{sh}x}=\frac{du}{u\operatorname{sh}x}$$

și integralele prime

$$\frac{u^2}{y}=C_1,\quad \frac{y}{\operatorname{ch}x}=C_2.$$

Ecuația generală a suprafețelor integrale este

$$u^2=yf\left(\frac{y}{\operatorname{ch}x}\right).$$

Prin lănțișor trec o infinitate de suprafețe integrale definite de ecuația

$$f\left(\frac{u^2}{y},\ \frac{y}{\operatorname{ch}x}\right)=0.$$

6.2.1. Ecuația este neliniară de ordinul 1. Vom determina integrala completă prin metoda Lagrange — Charpit.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia se scrie sub forma

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad \text{adică} \quad pq - z = 0.$$

Sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp+Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ},$$

unde

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad P = \frac{\partial F}{\partial p} \quad Q = \frac{\partial F}{\partial q},$$

se scrie

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}.$$

O integrală primă a sistemului este

$$q = ap, \quad a > 0, \quad a = \text{const.}$$

Introducînd în ecuaţie găsim $ap^2 = z$, de unde

$$p = \sqrt{\frac{z}{a}}, \quad q = \sqrt{az} \text{ pentru } z > 0.$$

Ecuaţia cu diferenţiale totale $dz = pdx + qdy$ va fi

$$dz = \sqrt{\frac{z}{a}}\, dx + \sqrt{az}\, dy$$

sau

$$\sqrt{\frac{a}{z}}\, dz = dx + a\, dy,$$

de unde

$$\sqrt{az} = \frac{1}{2}(x + ay + b), \quad (b = \text{const.}).$$

Integrala completă este $\sqrt{az} - \frac{1}{2}(x + ay + b) = 0$.

2. Sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{-2q} = \frac{dz}{2(p^2 - q^2)} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q}$$

Scanned with OKEN Scanner

ne dă o integrală primă

$$q = ap.$$

Din ecuație rezultă

$$p = \sqrt{\frac{z}{a^2-1}}, \quad q = a\sqrt{\frac{z}{a^2-1}}, \quad \frac{z}{a^2-1} > 0,$$

iar din ecuația cu diferențiale totale

$$\sqrt{\frac{z}{a^2-1}}\,dz = dx + a\,dy$$

rezultă integrala completă $2\sqrt{z(a^2-1)} - x - ay + b = 0$, $b = \text{const.}$

3. Din sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{x+zq} = \frac{dy}{y+zp} = \frac{dz}{px+qy+2pz} = \frac{-dp}{p(1+pq)} = \frac{-dq}{q(1+pq)}$$

rezultă o integrală primă

$$p = aq,$$

iar din ecuație $q = -\dfrac{ax+y}{az}$, deci $p = -\dfrac{ax+y}{z}$.

Ecuația cu diferențiale totale este

$$azdz = -(ax + y)(adx + y)$$

și integrala completă $az^2 + (ax + y)^2 = b^2$.

4. Sistemul caracteristic este

$$\frac{dx}{x(z+yq)} = \frac{dy}{y(z+xp)} = \frac{dz}{px(z+yq) + qy(z+xp)} =$$

$$= \frac{-dp}{p(z+yq) + p(xp+yq)} = \frac{-dq}{q(z+xp) + q(xp+yq)}.$$

De aici rezultă

$$\frac{qdp - pdq}{pq} = \frac{ydx - xdy}{xy},$$

de unde o integrală primă a sistemului

$$q = ap\frac{x}{y}:$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de ecuaţia dată obţinem

$$p = \frac{z(1+a)}{ax}, \quad q = \frac{z(1+a)}{y}, \text{ deci}$$

$$z = bx^{\frac{1+a}{a}} y^{1+a}, \qquad (a, b = \text{const}).$$

5. Ecuaţia este de forma [7]

$$F(p, q, z - px - qy) = 0,$$

care e o generalizare a ecuaţiei lui Clairaut.

Notînd $u = z - px - qy$ se observă că

$$X = -pF'_u, \quad Y = -qF'_u, \quad Z = F'_u,$$

de unde rezultă

$$X + pZ = 0, \quad Y + qZ = 0.$$

Ultima ecuaţie dă $q = b$, iar sistemul

$$\begin{cases} F(p, q, z - px - qy) = 0 \\ q = b \end{cases}$$

conduce la ecuaţia Clairaut

$$F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \quad b, z - x\frac{\partial z}{\partial x} - by\right) = 0,$$

cu integrala generală

$$F(a, b, z - ax - by) = 0.$$

În cazul ecuaţiei date, integrala completă va fi

$$(z - ax - by)^2 + ab = 0.$$

6. Ecuaţia se poate scrie sub forma

$$\frac{(x+p-1)^2}{p} - (y^2q - 1) = 0.$$

Luînd

$$\frac{(x+p-1)^2}{p} = a, \quad y^2q - 1 = a,$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem

$$p = \frac{2(x-1) + a \pm \sqrt{4a(x-1) + a^2}}{2}, \quad q = \frac{a+1}{y^2},$$

iar din

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

se obține integrala completă

$$z = \frac{x^2}{2} + \left(\frac{a}{2} - 1\right) x \pm \frac{1}{6a}\left[4a(x-1) + a^2\right]^{3/2} - \frac{a+1}{y} + b.$$

6.3. Notăm $u = px + qy$, $v = py - qx$ și ecuația se scrie

$$u^2 - 2v + 2\varphi(z) = 0. \tag{1}$$

Sistemul caracteristic se scrie

$$\frac{dx}{ux - y} = \frac{dy}{uy + x} = \frac{dz}{u^2 - v} = \frac{-dp}{pu + q + p\varphi'(z)} = \frac{-dq}{qu - p + q\varphi'(x)},$$

dar

$$du = p\,dx + q\,dy + x\,dp + y\,dq,$$
$$dv = p\,dy - q\,dx + y\,dp - x\,dq$$

și se determină combinația integrabilă

$$\frac{du}{u} = \frac{dv}{v},$$

de unde

$$u = av, \tag{2}$$

iar din (1) se obține ținînd seama de (2)

$$v = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2a^2\varphi(z)}}{a^2}.$$

Din sistemul

$$px + qy = \frac{1 + \sqrt{1 - 2a^2\varphi(z)}}{a^2}$$

$$py - qx = \frac{1 + \sqrt{1 - 2a^2\varphi(z)}}{a^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

se determină p și q care înlocuiți în $dz = pdx + qdy$ conduce la ecuația cu diferențiale totale

$$\frac{a^2dz}{1+\sqrt{1-2a^2\varphi(z)}} = a\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} - \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},$$

deci la integrala completă

$$\Phi(z, a, b) = \frac{a}{2}\ln(x^2+y^2) - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + b.$$

Integrala generală este înfășurătoarea unei familii de integrale complete cu $b = \omega(a)$:

$$\begin{cases} \Phi(z, a, b) = \dfrac{a}{2}\ln(x^2+y^2) - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} + \omega(a) \\ \Phi'_a(z, a, b) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \omega'(a). \end{cases}$$

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct din spațiu și fie planele determinate de ecuațiile

$$(x-x_0)p + (y-y_0)q - (z-z_0) = 0,$$

unde p și q satisfac relația

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0.$$

Înfășurătoarea familiei de plane date de aceste ecuații formează un con cu vîrful în M_0, numit conul lui Monge. Deci ecuația cu derivate parțiale $F(x, y, z, p, q) = 0$ atașează fiecărui punct M_0 din domeniul de definiție al funcției F cîte un astfel de con.

Ecuația conului lui Monge se scrie sub formă parametrică

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{P} = \dfrac{y-y_0}{Q} = \dfrac{z-z_0}{Pp+Qq} \\ F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0. \end{cases}$$

În cazul ecuației date, ecuația conului lui Monge este

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{p(x^2-y^2)} = \dfrac{y-y_0}{2pxy+q(y^2-x^2)} = \dfrac{z-z_0}{(x^2-y^2)(p^2-q^2)+2pqxy} \\ (px_0+qy_0)^2 - 2(py_0-qx_0) + 2z_0 = 0. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

6.4. Vom determina la început o integrală completă a ecuației. Sistemul caracteristic este

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2(p^2+q^2)} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q},$$

de unde avem

$$p = aq.$$

Integrala completă o determinăm din sistemul

$$p^2 + q^2 - z = 0$$

$$p = aq,$$

care conduce la $2\sqrt{z(a^2+1)} - ax - y - b = 0$.

Soluția generală a ecuației date se poate scrie

$$\begin{cases} 2\sqrt{z(a^2+1)} - ax - y - \omega(a) = 0 \\ \dfrac{2a\sqrt{z}}{\sqrt{a^2+1}} - x - \omega'(a) = 0. \end{cases}$$

Pentru determinarea funcției $\omega(a)$ vom scrie sistemul (ținînd seama de condițiile problemei):

$$2\sqrt{a^2+1} - a\cos t - \sin t - \omega(a) = 0$$

$$a\sin t - \cos t = 0,$$

de unde $a = \operatorname{ctg} t$ și din prima ecuație $\omega(a) = \sqrt{1+a^2}$.

Soluția problemei lui Cauchy este dată de funcțiile

$$2\sqrt{z(a^2+1)} - ax - y - \sqrt{1+a^2} = 0$$

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}(2\sqrt{z} - 1) - x = 0.$$

Eliminînd pe a între aceste ecuații obținem suprafața integrală căutată

$$(2\sqrt{z} - 1)^2 = x^2 + y^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.5. Sistemul caracteristic este

$$\frac{dx}{x-q}=\frac{dy}{y-p}=\frac{dz}{px+qy-2pq}=-\frac{dp}{2p}=-\frac{dq}{2q}=dt,$$

(vom introduce un parametru t sub forma dt) de unde rezultă soluția sub formă parametrică

$$p=p_0e^{-2t},\quad q=q_0e^{-2t},\quad x=\frac{q_0}{3}e^{-2t}+x_0e^t,$$

$$y=\frac{p_0}{3}e^{-2t}+y_0e^t,\quad z=\frac{p_0q_0}{3}e^{-4t}-(p_0x_0+q_0y_0)e^{-t}.$$

Fie sistemul

$$\begin{cases} px+qy-pq+z=0 \\ x_0=e^{-t}\left(x-\dfrac{q}{3}\right) \\ y_0=e^{-t}\left(y-\dfrac{p}{3}\right) \\ z_0=e^{t}\left(z-\dfrac{pq}{3}\right) \\ p_0=e^{2t}p. \end{cases}$$

Trebuie determinate funcțiile $p(\tau)$ și $q(\tau)$ care să determine planul (π) care este tangent la conul lui Monge relativ la punctul $M(X(\tau), y(\tau), z(\tau))$ și care conține tangenta în M la curba dată de ecuații parametrice $x=x(\tau)$, $y=y(\tau)$, $z=z(\tau)$. Acestea sînt determinate de sistemul

$$\begin{cases} F(x(\tau), y(\tau), z(\tau), p(\tau), q(\tau))=0 \\ x'(\tau)\,p(\tau)+y'(\tau)\,q(\tau)-z'(\tau)=0. \end{cases}$$

Avem

$$q\tau-pq+\tau=0,\quad q=1 \text{ deci } p=2\tau,$$

deci pentru $t=0$ obținem

$$x_0=1-\frac{\tau}{3},\quad y_0=\frac{\tau}{3},\quad z_0=\tau-\frac{2\tau^2}{3},$$

Scanned with OKEN Scanner

care conduc la sistemul

$$e^{-t}\left(x-\frac{q}{3}\right)=1-\frac{\tau}{3},\quad e^{-t}\left(y-\frac{p}{3}\right)=\frac{\tau}{3},$$

$$e^{t}\left(z-\frac{pq}{3}\right)=\tau-\frac{2\tau^2}{3},\ pe^{2t}=2\tau.$$

Rezolvînd acest sistem în x, y, z obținem

$$x=\left(1-\frac{\tau}{3}\right)e^{t}+\frac{1}{3}e^{-2t},\quad y=\frac{\tau}{3}(e^{t}+2e^{-2t}),$$

$$z=\frac{2\tau}{3}e^{-4t}+\left(\tau-\frac{2\tau^2}{3}\right)e^{-t}$$

ecuații care reprezintă suprafața căutată sub forma parametrică.

6.6. Integrala completă este

$$z=\sqrt{x^2+y^2}+ax+b.$$

Din $z=\sqrt{x^2+y^2}+ax+\omega(a)$ și condițiile problemei obținem $a=0$, $\omega(a)=-1$, deci suprafața integrală ce trece prin curba dată are ecuația

$$z=\sqrt{x^2+y^2}-1.$$

6.7.1. $B^2-AC=-(1+x^2)(1+y^2)<0$; ecuația este de tip eliptic.

Din ecuația caracteristică $(1+x^2)dy^2+(1+y^2)\,dx^2=0$ deducem

$$\sqrt{1+x^2}\,dy=\pm\sqrt{1+y^2}\,dx,$$

iar prin integrare obținem cele două familii de caracteristice complex conjugate:

$$\ln(y+\sqrt{1+y^2})+i\ln(x+\sqrt{1+x^2})=C_1,$$

$$\ln(y+\sqrt{1+y^2})-i\ln(x+\sqrt{1+x^2})=C_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu schimbarea de variabile

$$\xi = \ln(y + \sqrt{1+y^2}),\ \eta = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial u}{\partial \eta};\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{1+x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial u}{\partial \xi};\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u}{1+y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{y}{(1+y^2)^{3/2}}\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

ecuaţia se reduce la forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

2. $B^2 - AC = -\frac{1}{x}$.

Dacă $x > 0$ ecuaţia este de tip eliptic. Cele două familii de caracteristice sînt soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale

$$dy = \pm i\sqrt{x}\,dx,$$

deci

$$y + i\frac{2}{3}x^{3/2} = C_1,\ y - i\frac{2}{3}x^{3/2} = C_2.$$

Cu schimbarea de variabile

$$\xi = y,\ \eta = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

ecuaţia se reduce la forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Dacă $x < 0$ ecuaţia este de tip hiperbolic. Familiile de caracteristice sînt:

$$y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2} = C_1,\ y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2} = C_2.$$

Cu schimbarea de variabile

$$\xi = y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2},\ \eta = y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2},$$

Scanned with OKEN Scanner

ecuația se reduce la forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{6(\xi - \eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0.$$

3. $B^2 - AC = l^2 - x^2 > 0$, ecuație de tip hiperbolic.

$$\xi = y + \arcsin \frac{x}{l}, \quad \eta = y - \arcsin \frac{x}{l},$$

și ecuația devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\xi - \eta}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{u}{16} = 0.$$

4. Ecuație de tip eliptic; $\xi = y^2$, $\eta = x^2$ și ecuația devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

5. $B^2 - AC = 0$. Ecuația este de tip parabolic. Ecuația caracteristică se reduce la ecuația

$$x\,dy + y\,dx = 0,$$

cu soluția generală $xy = C$, $C = \text{const}$.

Vom face schimbarea de variabile

$$\xi = xy, \ \eta = x$$

și ecuația devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 4 \frac{\xi}{\eta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

6. $\xi = x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}$, $\eta = x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}$ și ecuația devine $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{m}{2(m+2)(\xi - \eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0.$

6.8. Ecuația este de tip hiperbolic: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F$. Pentru aceste ecuații funcțiile

$$h(x, y) = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \quad k(x, y) = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c$$

se numesc invarianții ecuației. Dacă $h = 0$, $(k = 0)$, soluția generală a ecuației date se obține prin calcule simple.

În cazul ecuației date $h = 0$, deci putem scrie ecuația

$$\frac{\partial v}{\partial x} + v = 0, \text{ unde } v = \frac{\partial u}{\partial y} + u.$$

Rezultă

$$v = f(y)e^{-x},$$

iar din ecuația cu derivate parțiale de ordinul întîi

$$\frac{\partial u}{\partial y} + u = f(y)e^{-x}$$

obținem:

$$u = e^{-x}\varphi(y) + e^{-y}\psi(x).$$

2. Avem $h = \dfrac{-1}{(x-y)^2}$, $k = 0$, deci putem scrie ecuația

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2v}{x-y} = 0, \text{ cu } v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3u}{x-y}.$$

Rezultă

$$v = \frac{f(x)}{(x-y)^2}$$

și din ecuația

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3u}{x-y} = \frac{f(x)}{(x-y)^2}$$

obținem

$$u(x, y) = \frac{1}{(x-y)^3}\left[g(y) + \int (x-y)\, f(x)\, dx\right].$$

3. Vom face schimbarea de funcție $u = (x - y^2)^{\alpha}v$ și vom determina pe α așa încît să obținem o formă cît mai simplă a ecuației. Cu schimbarea de funcție ecuația devine

$$(x-y)^2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - (x-y)(\alpha + a)\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] -$$
$$- v[\alpha^2 + \alpha(2a-1) + a^2 - a] = 0.$$

Pentru $\alpha = -a$ obținem ecuația

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0,$$

cu integrala generală

$$v(x, y) = f(x) + g(y),$$

deci

$$u(x, y) = \frac{f(x) + g(y)}{(x - y)^a}.$$

4. Ecuația este de tip hiperbolic. Cu schimbarea de variabile

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = yx^2$$

ecuația devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{4\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

care se mai scrie

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(4\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} - u\right) = 0,$$

deci

$$4\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} - u = f(\eta).$$

De aici rezultă

$$u = \sqrt[4]{\eta}\,[\varphi(\eta) + \psi(\xi)]$$

și

$$u(x, y) = \sqrt[4]{x^3 y}\left[\varphi(x^3 y) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)\right].$$

5. Vom căuta o soluție de forma $u(x, y) = z(x, y) \cdot v(x, y)$, determinînd funcția z din condiția ca coeficienții lui $\frac{\partial v}{\partial x}$ și $\frac{\partial v}{\partial y}$ din ecuație să fie nuli.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$v\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + z\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + xz\right)\frac{\partial v}{\partial x} +$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial x} + zy\right)\frac{\partial v}{\partial y} + (1 - xy)zv = 0.$$

Din sistemul

$$\frac{\partial z}{\partial x} + zy = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} + xz = 0,$$

rezultă

$$z(x, y) = Ce^{-xy}, \quad C = \text{const.}$$

Ecuaţia devine

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0,$$

cu soluţia generală $v(x, y) = f(x) + g(y)$,
deci

$$u(x, y) = Ce^{-xy}[f(x) + g(y)].$$

6.9. Ecuaţia este de tip hiperbolic. Din ecuaţia caracteristică

$$3dy^2 - 7dxdy + 2dx^2 = 0$$

obţinem familiile de curbe caracteristice

$$2x - y = C_1, \quad x - 3y = C_2.$$

Cu schimbarea de variabile $\xi = 2x - y$, $\eta = x - 3y$ ecuaţia se reduce la forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

iar integrala generală

$$u(x, y) = \varphi(2x - y) + \psi(x - 3y).$$

Condiţiile problemei se scriu

$$\begin{cases} \varphi(2x) + \psi(x) = x^3 \\ -\varphi'(2x) - 3\psi'(x) = 2x^2, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$\varphi(2x) = \frac{19}{96}(2x)^3 + C_1, \quad \psi(x) = -\frac{7}{12}x^3 - C_1,$$

deci

$$u(x, y) = \frac{19}{96}(2x - y)^3 - \frac{7}{12}(x - 3y)^3.$$

6.10. Ecuația este de tip hiperbolic. Direcțiile caracteristice ale ecuației date sînt determinate de ecuația :

$$y^2dx^2 - x^2dy^2 = 0,$$

de unde rezultă $xy = C_1$, $\frac{x}{y} = C_2$.

Făcînd schimbarea de variabile

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{x}{y}$$

obținem forma canonică a ecuației date

$$2\xi\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \text{ sau } \frac{\partial}{\partial\eta}\left(2\xi\frac{\partial u}{\partial\xi} - u\right) = 0,$$

cu soluția generală

$$u = \varphi(\xi) + \sqrt{\xi}\,\psi(\eta).$$

Rezultă

$$u(x, y) = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\,\psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Pentru determinarea funcțiilor φ și ψ ne folosim de condițiile inițiale :

$$\begin{cases} \varphi(x) + \sqrt{x}\psi(x) = x^2 \\ x\varphi'(x) - x\sqrt{x}\psi'(x) + \frac{1}{2}\sqrt{x}\psi(x) = x, \end{cases}$$

de unde rezultă

$$\varphi(x) = \frac{1}{3}x^2 + x - C\sqrt{x}, \quad \psi(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \sqrt{x} + C, \quad C = \text{const.}$$

Soluția problemei va fi

$$u(x, y) = \frac{1}{3}(xy)^2 + xy + \sqrt{xy}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^{3/2} - \left(\frac{x}{y}\right)^{1/2}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

6.11.1. Metoda lui Riemann permite rezolvarea problemei lui Cauchy generală pentru ecuaţiile liniare de tip hiperbolic cu două variabile independente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = F(x, y), \qquad (1)$$

$$u(x, y)|_C = f, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_C = g.$$

Formula lui Riemann de rezolvare a problemei Cauchy este

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}[(uv)(P_1) + (uv)(P_2)] -$$

$$- \int_{P_1P_2} M\mathrm{d}y - N\mathrm{d}x + \iint_D vF\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde D este domeniul format de curba (C)care poartă datele iniţiale şi caracteristicile ecuaţiei (1) care trec prin punctul $(\xi, \eta) \notin (C)$, (fig. 6.11.1); iar

$$M = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv; \; N = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv,$$

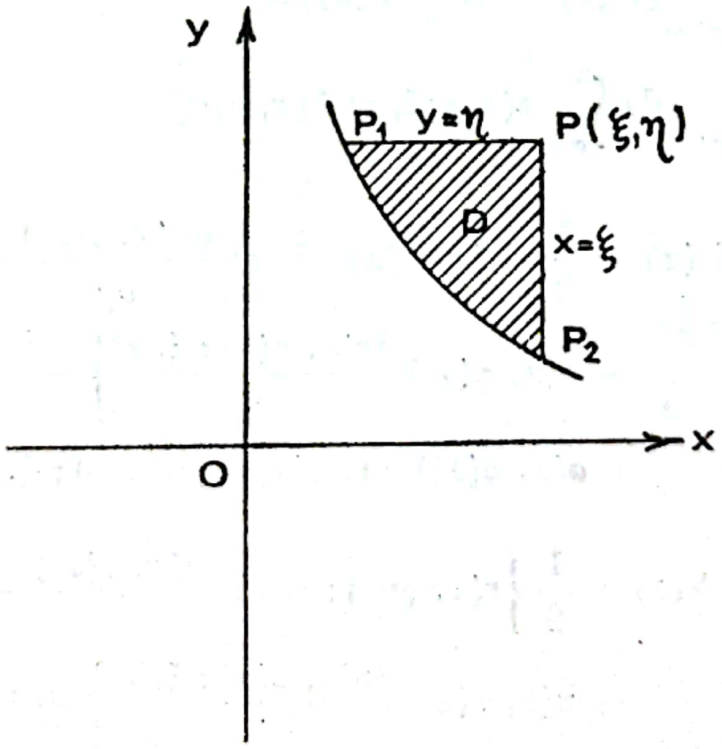


Fig. 6.11.1

Scanned with OKEN Scanner

iar funcția $v = v(x, y\,;\,\xi,\,\eta)$ de clasă C^1 este funcția lui Riemann pentru ecuația (1) dacă verifică condițiile :

1) Ca funcție de x și y verifică ecuația $L^*v = 0$, adică

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\,[a(x, y)v] - \frac{\partial}{\partial y}\,[b(x, y)\,v] + c(x, y)v = 0.$$

2) Pe caracteristica $x = \xi$ verifică ecuația

$$\frac{\partial x(\xi, y, \xi, \eta)}{\partial y} - a(\xi, y)v = 0.$$

3) Pe caracteristica $y = \eta$ verifică ecuația

$$\frac{\partial v(x, \eta\,;\,\xi, \eta)}{\partial x} - b(x, \eta)v = 0.$$

4) Pentru $x = \xi$, $y = \eta$, $v(\xi, \eta\,;\,\xi, \eta) = 1$.

Funcția lui Riemann determinată prin definiția dată există și este unic determinată dacă $a(x, y)$, $b(x, y) \in C^2(D)$ și $c(x, y) \in \in C^1(D)$.

Scriind explicit

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\{f(\xi)v(\xi, \varphi(\xi)\,;\,\xi, \eta) + f(\varphi^{-1}(\eta))v(\varphi^{-1}(\eta), \eta\,;\,\xi, \eta)\} +$$

$$+ \int_{\varphi^{-1}(\eta)}^{\xi} [N(x) - M(x)\varphi'(x)]\,dx +$$

$$+ \int_{\varphi^{-1}(\eta)}^{\xi} dx \int_{\varphi(x)}^{\eta} v(x, y\,;\,\xi, \eta)\,F(x, y)\,dy$$

cu

$$M(x) = \frac{1}{2}\left\{v(x, \varphi(x)\,;\,\xi, \eta)\,\frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial y} - \right.$$

$$\left. - u(x, \varphi(x))\,\frac{\partial v(x, \varphi(x)\,;\,\xi, \eta)}{\partial y}\right\} +$$

$$+ a(x, \varphi(x))u(x, \varphi(x))\,v(x, \varphi(x)\,;\,\xi, \eta).$$

și

$$N(x) = \frac{1}{2}\left\{v(x, \varphi(x)\,;\,\xi, \eta)\,\frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - u(x, \varphi(x))\,\frac{\partial v(x, \varphi(x)\,;\,\xi, \eta)}{\partial x}\right\} +$$

$$+ b(x, \varphi(x))u(x, \varphi(x))v(x, \varphi(x)\,;\,\xi, \eta).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a rezolva ecuaţia dată prin metoda lui Riemann o vom aduce mai întîi la forma canonică.

Din ecuaţia caracteristică $y^2dx^2 - x^2dy^2 = 0$ rezultă $ydx = \pm xdy$, de unde prin integrare obţinem cele două familii de curbe caracteristice

$$xy = C_1, \quad \frac{x}{y} = C_2.$$

Cu schimbarea de variabile

$$\xi = xy, \qquad \eta = \frac{x}{y}$$

ecuaţia se reduce la forma canonică

$$2\xi \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Pentru a preciza datele iniţiale ale problemei observăm că dreptei $y = 1$ îi corespunde prin schimbarea de variabile dreapta $\xi = \eta$ (necaracteristică). Deci ţinînd seama de condiţiile problemei avem

$$u|_c = f(\xi); \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_c = \frac{g(\xi)}{\xi}.$$

Funcţia lui Riemann $v(\xi, \eta; x, y)$ este soluţie a ecuaţiei adjuncte

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial y} + \frac{1}{2\xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0,$$

adică

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{2\xi} v\right) = 0,$$

de unde rezultă $v = \sqrt{\frac{f(\xi, x, y)}{\xi}}$ şi care satisface condiţiile $\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{2\xi} v = 0$ pentru $y = \eta$ şi $v(x, y; x, y) = 1$ pentru $x = \xi$, $y = \eta$, deci

$$v = \sqrt{\frac{x}{\xi}}.$$

Rezultă

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{\xi}} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \qquad N = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{\xi}} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4\xi}\sqrt{\frac{x}{\xi}} u.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama că pe arcul de curbă P_1P_2 (fig. 6.11.2) avem $d\xi = d\eta$ obţinem

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\left[f(\xi) + \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} f(\eta)\right] + \frac{\sqrt{\xi}}{4}\int_{\xi}^{\eta} \frac{f(\tau)}{\tau\sqrt{\tau}}\, d\tau - \frac{\sqrt{\xi}}{2}\int_{\xi}^{\eta} \frac{g(\tau)}{\tau\sqrt{\tau}}\, d\tau,$$

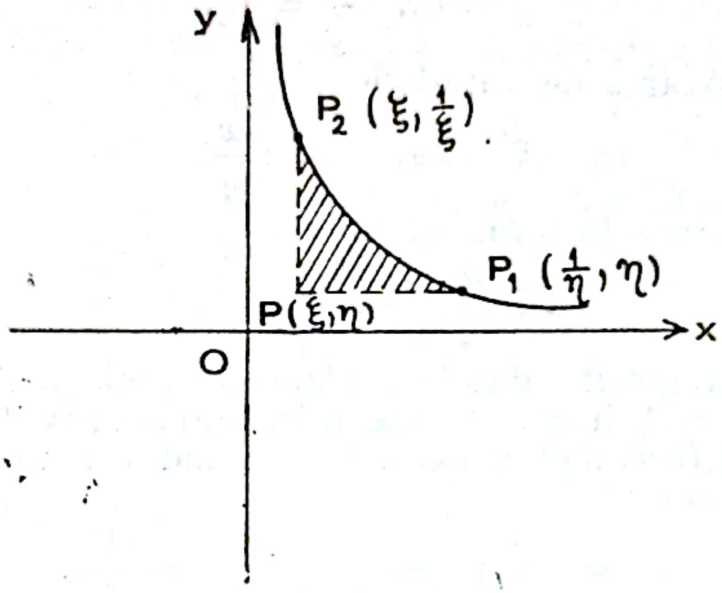


Fig. 6.11.2.

deci

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\left[f(xy) + yf\left(\frac{x}{y}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{4}\sqrt{xy}\int_{xy}^{\frac{x}{y}} \frac{f(\tau)}{\tau\sqrt{\tau}}\, d\tau - \frac{1}{2}\sqrt{xy}\int_{xy}^{\frac{x}{y}} \frac{g(\tau)}{\tau\sqrt{\tau}}\, d\tau.$$

2. Aducem ecuaţia la cealaltă formă canonică făcînd schimbarea de variabile

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

Ecuaţia devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + u = 0.$$

Funcţia lui Riemann va fi soluţie a ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} - v = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

şi avînd în vedere că $a = b = 0$ condiţiile la care satisface $v(\xi, \eta; x, y)$ se reduc la $v = 1$ pentru $\xi = x$ şi $v = 1$ pentru $\eta = y$. Deci vom căuta pe v de forma $v = h[(\xi - x)(\eta - y)]$ cu $v(0) = 1$. Înlocuind în ecuaţia $L^*x = 0$ obţinem ecuaţia diferenţială :

$$zv'' + v' - v = 0, \text{ cu } z = (\xi - x)(\eta - y),$$

care este o ecuaţie de tip Bessel, deci

$$v(\xi, \eta; x, y) = I_0(\sqrt{(\xi - x)(\eta - y)}).$$

Pentru precizarea datelor iniţiale observăm că liniei $t = 0$ prin schimbarea de variabile îi corespunde dreapta $\eta = \xi$ (necaracteristică), iar pe această dreaptă avem

$$u|_{\xi=\eta} = f(\xi); \quad -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\bigg|_{\xi=\eta} = \frac{1}{c} g(\xi).$$

Avem

$$M = \frac{1}{2}\left[v\frac{\partial u}{\partial \eta} - (\xi - x)u\frac{\partial v}{\partial z}\right];$$

$$N = \frac{1}{2}\left[v\frac{\partial u}{\partial \xi} - u(\eta - y)\frac{\partial v}{\partial z}\right],$$

iar pe arcul P_1P_2, $\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}\eta$, deci (fig. 6.11.3.)

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}[f(\xi) + f(\eta)] + \int_\xi^\eta I_0(\sqrt{(\tau - \xi)(\tau - \eta)})\, f(\tau)\, \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \frac{\xi - \eta}{2c}\int_\xi^\eta \frac{I_0'(\sqrt{(\tau - \xi)(\tau - \eta)})}{\sqrt{(\tau - \xi)(\tau - \eta)}}\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Revenind la vechile variabile

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)] +$$

$$+ \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} I_0(\sqrt{(\tau - x)^2 - c^2t^2})\, f(\tau)\, \mathrm{d}\tau -$$

$$- t\int_{x-ct}^{x+ct} \frac{I_0'(\sqrt{(\tau - x)^2 - c^2t^2})}{\sqrt{(\tau - x)^2 - c^2t^2}}\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Funcţia lui Riemann este soluţie a ecuaţiei adjuncte

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}[(x+1)v] - \frac{\partial}{\partial y}[(x-1)v] + (x^2-1)v = 0$$

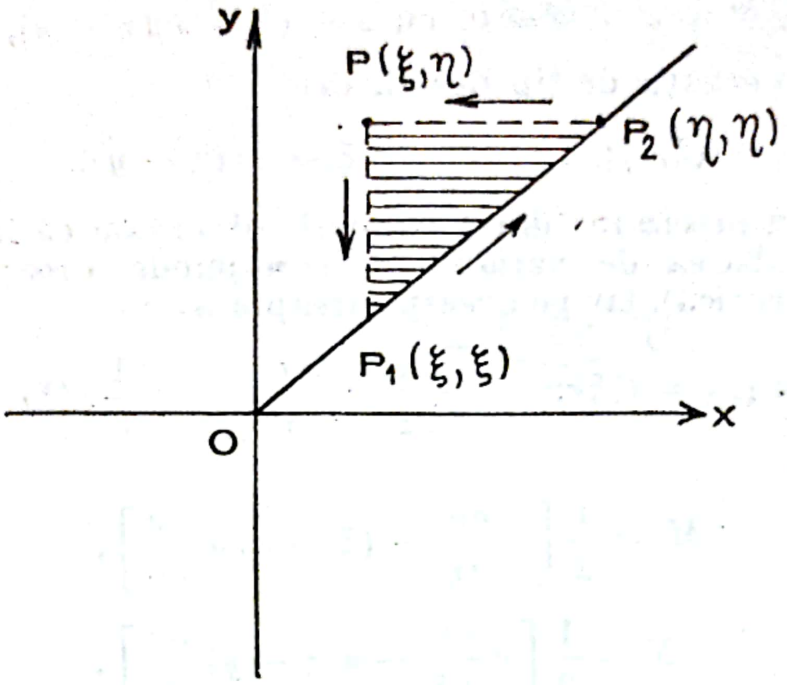


Fig. 6.11.3.

şi satisface condiţiile

$$\frac{\partial v}{\partial x} - (x+1)v = 0, \qquad \text{pentru } x = \xi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - (x-1)v = 0, \qquad \text{pentru } y = \eta,$$

$$v(x, y\,;\,\xi, \eta) = 1, \qquad \text{pentru } x = \xi,\ y = \eta.$$

Se obţine

$$v(x, y\,;\,\xi, \eta) = e^{(x-1)y - (\xi-1)\eta + \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(\xi+1)^2}{2}}.$$

6.12. Ecuaţia oscilaţiilor de amplitudine mică ale funcţiei este [17]

$$(l-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad a = \sqrt{g},$$

g fiind acceleraţia gravitaţiei.

Ecuaţia caracteristică este $(l-x)\,dt^2 - \frac{1}{a^2}dx^2 = 0$, de unde obţinem familiile de caracteristice

$$\sqrt{l-x} + \frac{at}{2} = C_1, \quad -\sqrt{l-x} + \frac{at}{2} = C_2,$$

$$C_1, C_2 = \text{const.}$$

Cu schimbarea de variabile $\xi = \sqrt{l-x} + \frac{at}{2}$, $\eta = \frac{at}{2} - \sqrt{l-x}$ şi de funcţie $u = \frac{z}{\sqrt[4]{2}\sqrt{l-x}}$ ecuaţia va fi adusă la forma canonică cea mai simplă:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{z}{4(\xi-\eta)^2} = 0.$$

Funcţia lui Riemann $v(\xi, \eta; x, y)$ este soluţie a ecuaţiei adjuncte

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{v}{4(\xi-\eta)^2} = 0$$

şi satisface condiţiile $\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$ pentru $\xi = x$; $\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$ pentru $\eta = y$ şi $v = 1$ pentru $\xi = x$, $\eta = y$. Deci vom căuta o soluţie a acestei ecuaţii de forma

$$v(\xi, \eta; x, y) = h\left(\frac{(\xi-x)(\eta-y)}{(\xi-\eta)(x-y)}\right).$$

Înlocuind în ecuaţie ajungem la ecuaţia diferenţială de ordinul doi

$$\omega(\omega-1)h''(\omega) + (2\omega-1)h'(\omega) + \frac{1}{4}h(\omega) = 0,$$

cu soluţia

$$h = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \omega\right), \qquad \omega = \frac{(\xi-x)(\eta-y)}{(\xi-\eta)(x-y)},$$

unde $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ este funcția hipergeometrică, soluție a ecuației $x(x-1)y'' + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0$, cu

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{\alpha+k-1}{k}\binom{\beta+k-1}{k}}{\binom{\gamma+k-1}{k}} x^k, \quad |x|<1.$$

Pentru aplicarea formulei lui Riemann de rezolvare a problemei Cauchy observăm că pentru $t = 0$, $\xi = -\eta$, deci vom integra pe conturul din fig. 6.12 și vom ține seama de condițiile

$$z|_c = \sqrt{2\xi}\, f(l-\xi^2), \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\bigg|_c = \frac{2}{a}\sqrt{2\xi}\, g(l-\xi^2).$$

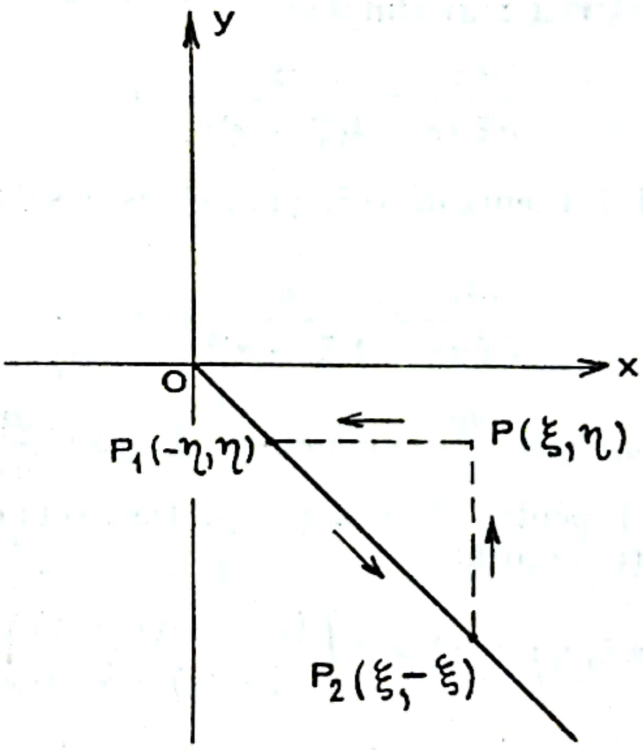


Fig. 6.12

Rezultă

$$z(\xi, \eta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{\xi} f(l-\xi^2) + \sqrt{-\eta} f(l-\eta^2)\right] +$$

$$+ \int_{-\eta}^{\xi} \left[\frac{\sqrt{2\tau}}{a} vg(l-\tau^2) + \frac{1}{4\sqrt{\tau}} f(l-\tau^2)\, v'\, \frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}\right] d\tau,$$

de unde

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt[4]{l-x}}\left[\sqrt{\sqrt{l-x}+\frac{at}{2}}\,f\left(x-\sqrt{l-x}at-\frac{a^2t^2}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\sqrt{l-x}-\frac{at}{2}}\,f\left(x+\sqrt{l-x}at-\frac{a^2t^2}{4}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{\sqrt[4]{l-x}}\int_{\sqrt{l-x}-\frac{at}{2}}^{\sqrt{l-x}+\frac{at}{2}}\left[\frac{1}{a}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{\frac{a^2t^2}{4}-(\tau-\sqrt{l-x})^2}{4\sqrt{l-x}\,\tau}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\tau}\,g(l-\tau^2)+\frac{at\,f(l-\tau^2)}{8\sqrt{l-x}\sqrt{\tau}}F'\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{\frac{a^2t^2}{4}-(\tau-\sqrt{l-x})^2}{4\sqrt{l-x}\,\tau}\right)\right]\mathrm{d}\tau.$$

6.13. Vom determina soluția ecuației conductibilității termice [17]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}},\tag{1}$$

în condițiile

$$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0,\ u|_{t=0}=f(x),\ 0<x<l.\tag{2}$$

Vom utiliza metoda separării variabilelor, deci

$$u(x,t)=S(x).T(t).$$

Din (1) obținem ecuațiile diferențiale cu coeficienți constanți

$$S''+\lambda S=0,\ T'+\lambda a^2T=0,\quad(\lambda=\text{const.}).$$

Pentru $\lambda<0$ și $\lambda=0$ obținem soluția banală.

Pentru $\lambda>0$ prima ecuație ne dă

$$S(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x,\ C_1,C_2=\text{const.},$$

iar condițiile $S(0)=0$, $S(l)=0$ ne dau $C_1=0$ și pentru $C_2\neq 0$, $\sin\lambda l=0$, deci $\lambda=\frac{n\pi}{l}$, $n\in N^*$.

Avem

$$S_n(x)=C_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$T_n(x) = D_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t}, \quad C_n, D_n = \text{const.}$$

deci

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Ultima condiție (2) ne dă

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x),$$

deci

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\tau) \sin \frac{n\pi}{l} \tau \, d\tau.$$

Soluția ecuației date va fi

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x. \int_0^l f(\tau) \sin \frac{n\pi}{l} \tau \, d\tau.$$

2. În acest caz condițiile la limită sînt :

$$u|_{x=0} = 0, \; k \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = -hu|_{x=l},$$

unde h și k sînt coeficienții de conductibilitate termică efectivă ai materialului barei, exterior și interior.

În aceste condiții ținînd seama de prima condiție la limită obținem

$$S(x) = C_2 \sin \lambda x,$$

iar a doua condiție la limită conduce la ecuația transcendentă $\operatorname{tg} \lambda l = -\frac{k\lambda}{h}$ sau $\operatorname{tg} \mu = -\frac{k}{lh}\mu$. Notînd cu μ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ rădăcinile pozitive ale ecuației transcendente, ținînd cont de condiția inițială $u|_{t=0} = f(x)$, avem

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^2 l^2 + k^2 \mu_n^2}{hl(hl+k)+k^2 \mu_n^2} e^{-\frac{a^2 \mu_n^2 t}{l^2}} \sin \frac{\mu_n x}{l} \int_0^l f(\tau) \sin \frac{\mu_n \tau}{l} \, d\tau.$$

6.14. Vom utiliza metoda lui Fourier :

$$u(x, t) = S(x) \cdot T(t),$$

unde $T(t + 2\pi) = T(t)$. Înlocuind în ecuaţie obţinem

$$T'' - \lambda T = 0$$

$$S' + (a^2 - \lambda)\, xS = 0,$$

de unde putem $\lambda < 0$ obţine soluţia ($\lambda = -n^2$):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(a^2+n^2)x^2}{2}} [A_n \cos nt + B_n \sin nt].$$

Din

$$\frac{\sin t}{10 - 6\cos t} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nt + B_n \sin nt,$$

rezultă

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos nt}{5 - 3\cos t}\,dt; \quad B_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin nt}{5 - 3\cos t}\,dt$$

sau

$$A_n + iB_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{5 - 3\cos t}\,dt.$$

Punînd $z = e^{it}$ obţinem

$$A_n + iB_n = \frac{i}{\pi}\int_{|z|=1} \frac{z^n}{3z^2 - 10z + 3}\,dz = -2R_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4.3^{n-1}}.$$

Rezultă

$$A_n = \frac{1}{4.3^{n-1}}, \quad B_n = 0.$$

Deci

$$u(x, t) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(a^2+n^2)x^2}{2}} \frac{\cos nt}{3^n}$$

Dacă $\lambda = 0$ avem $T'' = 0$ şi $T(t) = C_1t^2 + C_2t + C_3$, ($C_1$, C_2, C_3 = const.), soluţie ce nu satisface condiţia de periodicitate.

Dacă $\lambda > 0$ ecuaţia nu are soluţie care să satisfacă condiţiile date.

6.15. Condiţiile problemei sînt [17]:

$$u(x\ t)|_{t=R} = 0;\ u(x, t)|_{t=0} = f(r);\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r), \quad 0 < r < R.$$

Scanned with OKEN Scanner

Utilizind metoda separării variabilelor

$$u(r, t) = S(r)\, T(t)$$

obţinem ecuaţiile diferenţiale

$$S'' + \frac{1}{r} S' + \lambda S = 0$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0. \tag{1}$$

Pentru $\lambda < 0$ şi $\lambda = 0$ obţinem soluţia banală.
Dacă $\lambda > 0$ ecuaţia

$$r^2 S'' + rS' + \lambda r^2 S = 0$$

este de tip Bessel cu soluţia $S(r) = CI_0(\sqrt{\lambda} r)$. Condiţia $u(r, t)|_{r=R} = 0$, ne dă $I_0(\sqrt{\lambda}\, R) = 0$, adică $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2$, μ fiind zerourile funcţiei Bessel $I_0(z)$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Ţinînd seama de valorile găsite pentru λ ecuaţia a 2-a din (1) ne dă

$$T_n(t) = A_n \sin a \frac{\mu_n}{R} t + B_n \cos a \frac{\mu_n}{R} t,$$

deci

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin \frac{a\mu_n}{R} t + b_n \cos \frac{a\mu_n}{R} t \right) I_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right).$$

Condiţiile iniţiale ne dau

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n I_0 \left(\frac{\mu_n \tau}{R} \right),$$

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{a\mu_n}{R} I_0 \frac{\mu_n r}{R} \Big),$$

de unde rezultă coeficienţii

$$b_n = \frac{2}{R^2 I_1^2(\mu_n)} \int_0^R \tau f(\tau) I_0 \left(\frac{\mu_n \tau}{R} \right) d\tau,$$

$$a_n = \frac{2}{Ra\mu_n I_1^2(\mu_n)} \int_0^R \tau g(\tau) I_0 \left(\frac{\mu_n \tau}{R} \right) d\tau,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$u(r,t)=\frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{I_1^2(\mu_n)}\left[\frac{\sin a\frac{\mu_n}{R}t}{a\mu_n}\int_0^R \tau g(\tau)\,I_0\left(\frac{\mu_n\tau}{R}\right)\mathrm{d}\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos a\frac{\mu_n}{R}t}{R}\int_0^R \tau f(\tau)\,I_0\left(\frac{\mu_n\tau}{R}\right)\mathrm{d}\tau\right].$$

6.16. Se va determina soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1}$$

cu condiţiile

$$u(r,t)\,|_{r=R}=0,\quad u(r,t)\,|_{t=0}=f(r). \tag{2}$$

Utilizînd metoda separării variabilelor vom căuta soluţia de forma

$$u(r,t)=S(r)\;T(t). \tag{3}$$

Din (1) rezultă ecuaţiile diferenţiale

$$r^2S''+rS'+\lambda r^2S=0$$

$$T'+\lambda a^2T=0.$$

Prima ecuaţie este o ecuaţie de tip Bessel cu soluţia $S(r)=$ $=CI_0(\sqrt{\lambda}r)$ (vezi ex. 6.15), iar din condiţia $u(R,t)=0$ obţinem pentru λ valorile $\lambda_n=\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2$, μ_n — zerourile funcţiei $I_0(z)$, $(n=1,2,\ldots)$.

Ţinînd seama de aceste valori şi de soluţiile ecuaţiei în T avem :

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}t}\;I_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right),\qquad C_n=\text{const.}$$

Condiţia $u(r,0)=f(r)$, ne dă

$$C_n=\frac{2}{R^2I_1^2(\mu_n)}\int_0^R \tau f(\tau)\,I_0\left(\frac{\mu_n}{R}\tau\right)\mathrm{d}\tau.$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$u(r,t)=\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right)}{I_1^2(\mu_n)}e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}t}\int_0^R \tau f(\tau)\,I_0\left(\frac{\mu_n}{R}\tau\right)d\tau.$$

6.17. Vom determina soluția ecuației

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0, \tag{1}$$

de forma

$$u(r,\theta)=S(r)\,T(\theta), \tag{2}$$

și care să satisfacă condițiile date.

Înlocuind (2) în ecuația (1) obținem ecuațiile

$$\begin{aligned} r^2S''+rS'-\lambda S&=0\\ T''+\lambda T&=0, \end{aligned} \tag{3}$$

cu

$$T(\theta)=T(\theta+2\pi). \tag{4}$$

Pentru $\lambda>0$ a doua ecuație (3) ne dă

$$T(\theta)=A\cos\sqrt{\lambda}\theta+B\sin\sqrt{\lambda}\theta,\quad (A,B=\text{const.}),$$

iar condiția (4) ne dă $\sqrt{\lambda}\theta=\sqrt{\lambda}(\theta+2\pi)+2n\pi$, de unde rezultă $\lambda=n^2$, $(n=1,2,\ldots)$, deci

$$T_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta,$$

cu $n=0,1,2,\ldots$, deoarece pentru $\lambda=0$ obținem soluția $T(\theta)=\text{const.}$

Pentru $\lambda=n^2$ prima ecuație (3) se scrie

$$r^2S''+rS'-n^2S=0$$

și are soluția

$$S_n(r)=C_nr^n+D_nr^{-n}.$$

Pentru $n=0$ ecuația devine

$$r^2S''+rS'=0$$

Scanned with OKEN Scanner

și are soluția

$$S(r) = k_1 \ln r + k_2, \quad (k_1, k_2 = \text{const.}),$$

deci

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n + k \ln r.$$

Ținînd seama că $u(r, \theta)$ trebuie să fie finit pentru $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ și ținînd seama de condițiile problemei coeficienții se determină din sistemul

$$a_n r_1^n + a_{-n} r_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta$$

$$a_n r_2^n + a_{-n} r_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cos n\theta \, d\theta.$$

Pentru $\lambda < 0$ ecuația nu are soluție.

6.18. Funcția căutată satisface ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

cu condițiile

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0,$$
$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=m} = 0, \tag{2}$$
$$u|_{z=0} = f(x, y), \quad u|_{z=n} = g(x, y).$$

Vom determina soluția ecuației date, utilizînd metoda lui Fourier. Căutăm soluțiile ecuației date sub forma

$$u(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z). \tag{3}$$

Din (2) rezultă că tebuie să să avem

$$X(0) = 0, \quad Y(0) = 0 \tag{4}$$
$$X(l) = 0, \quad Y(m) = 0. \tag{5}$$

Înlocuind funcția (3) în ecuația (1), găsim

$$X''YZ + Y''XZ + Z''XY = 0.$$

Împărțind această egalitate cu XYZ, obținem

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În membrul întîi avem o funcție care depinde numai de x, iar în membrul al doilea funcții care depind de y și z. Egalitatea nu este posibilă decît atunci cînd ele sînt egale cu o constantă. Notăm constanta cu a. Obținem

$$X'' - aX = 0$$

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} = a.$$

Același raționament ca mai înainte ne arată că ultima egalitate este adevărată numai dacă fiecare din cele două funcții este egală cu o constantă b. Avem

$$X'' - aX = 0 \tag{6}$$

$$Y'' - bY = 0 \tag{7}$$

$$Z'' + (a + b)\,Z = 0. \tag{8}$$

1. Fie $a = \lambda^2$. În acest caz soluția generală a ecuației (6) este

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x},$$

unde C_1 și C_2 sînt constante arbitrare. Condițiile (4) ne conduc la următorul sistem liniar și omogen în C_1 și C_2:

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} = 0.$$

Determinantul acestui sistem este diferit de zero, deci sînt posibile numai soluțiile banale $C_1 = C_2 = 0$. În consecință pentru $a > 0$, ecuația (6) nu admite nici o soluție nebanală, care să satisfacă condițiile (4).

2. Fie $a = 0$. Soluția generală în acest caz este de forma $X(x) = C_1 x + C_2$, C_1, C_2 — fiind constante arbitrare.

Condițiile (4) ne dau

$$X(0) = C_2 = 0, \quad X(l) = C_1 l = 0,$$

de unde rezultă $C_1 = 0$ și $C_2 = 0$. Ajungem din nou la soluția banală.

3. Fie $a < 0$, $a = -\lambda^2$. În acest caz soluția generală este

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Condițiile (4) ne conduc la egalitățile

$$X(0) = C_1 = 0$$

$$X(l) = C_2 \sin \lambda l = 0.$$

Ultimul produs se anulează dacă $C_2 = 0$, sau $\sin \lambda l = 0$. Primul caz $C_2 = 0$ ne conduce din nou la soluția banală $u(x, y, z) = 0$. Acceptăm deci că $C_2 \neq 0$ și

$$\sin \lambda l = 0.$$

Această egalitate este satisfăcută pentru

$$\lambda l = k\pi,$$

sau

$$\lambda = \frac{k\pi}{l},$$

unde k poate fi egal cu orice număr natural.

Soluția ecuației (6) corespunzătoare lui $\lambda = \frac{k\pi}{l}$ o scriem în felul următor:

$$X_k(x) = C_k \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

În concluzie, ecuația (6) admite un șir infinit de soluții nebanale care satisfac condițiile (4).

Urmează să integrăm ecuația (7).

4. Fie $b = \mu^2$. Soluția generală a ecuației (7) este

$$Y(y) = C_1 e^{\mu y} + C_2 e^{-\mu y}, \quad C_1, C_2 = \text{const}.$$

Condițiile (5) ne conduc la sistemul liniar și omogen în C_1 și C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\mu m} + C_2 e^{-\mu m} = 0, \end{cases}$$

al cărui determinant este diferit de zero, deci sînt posibile numai soluții banale $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Ecuația (7) nu admite soluții nebanale care să satisfacă condițiile (5).

5. Fie $b = 0$. În acest caz soluția generală a ecuației (7) este

$$Y(y) = C_1 y + C_2, \quad C_1, C_2 = \text{const.},$$

Scanned with OKEN Scanner

iar condițiile (5) conduc la $C_1 = C_2 = 0$, deci ajungem din nou la soluția banală.

6. Fie $b = -\mu^2$. Soluția generală a ecuației (7) în acest caz

$$Y(y) = C_1 \cos \mu y + C_2 \sin \mu y.$$

Condițiile (5) conduc la egalitățile

$$Y(0) = C_1 = 0$$

$$Y(m) = C_2 \sin \mu m = 0.$$

Avem deci

$$C_1 = 0 \text{ și } \sin \mu m = 0.$$

Rezultă

$$\mu = \frac{j\pi}{m}, \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Soluția ecuației (7) corespunzătoare lui $\mu = \frac{j\pi}{m}$ o scriem sub forma

$$Y_j(y) = A_j \sin \frac{j\pi}{m} y.$$

Urmează să integrăm ecuația (8), valorile lui a și b fiind fixate. Corespunzător lui

$$a = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad b = -\left(\frac{j\pi}{m}\right)^2$$

avem ecuația diferențială

$$Z'' - \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}\right) \pi^2 Z = 0,$$

a cărei soluție generală este

$$Z_{k,j} = B_{k,j}\, e^{\sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}}\pi z} + D_{k,j}\, e^{-\sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}}\pi z}, \quad (B_{k,j}, D_{k,j} = \text{const.}).$$

Notăm

$$u_{k,j}(x, y, z) = X_k(x)\, Y_j(y)\, Z_{k,j}(z).$$

Am obținut astfel un șir infinit de soluții de forma particulară (3) care satisfac condițiile (4) și (5).

Scanned with OKEN Scanner

Trecem acum la determinarea soluției problemei lui Cauchy cu ajutorul funcțiilor $u_{k,j}(x, y, z)$. Presupunem că există suma

$$u(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [E_{k,j} e^{z\pi \sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}}} +$$

$$+ F_{k,j} e^{-\pi z \sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}}}] \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m}.$$

Afirmăm, de asemenea, că funcția $u(x, y, z)$ este soluția problemei lui Cauchy, deci sînt satisfăcute condițiile inițiale ale problemei

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (E_{kj} + F_{k,j}) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{j\pi}{m} y$$

$$g(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} [E_{kj} e^{\pi n \sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}}} +$$

$$+ F_{kj} e^{-n\pi \sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}}}] \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{j\pi}{m} y.$$

Aceste egalități reprezintă dezvoltarea funcțiilor $f(x, y)$ și $g(x, y)$ în serie Fourier. Coeficienții acestor serii sînt

$$E_{k,j} + F_{k,j} = \frac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m f(x, y) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{j\pi}{m} y \, dx \, dy,$$

$$E_{k,j} e^{n\pi\alpha} + F_{k,j} e^{n\pi\alpha} =$$

$$= \frac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m g(x, y) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{j\pi}{m} y \, dx \, dy, \quad \alpha = \sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}}$$

De aici deducem pe $E_{k,j}$ și $F_{k,j}$ și obținem soluția problemei care satisface condițiile date:

$$u(x, y, z) = \frac{4}{lm} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{\pi j}{m} y}{\operatorname{sh}(\pi n \alpha)} \Big\{ \operatorname{sh}(\pi(n - z)\alpha) \cdot$$

$$\cdot \int_0^l \int_0^m f(x, y) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{j\pi}{m} y \, dx dy +$$

$$+ \operatorname{sh}(\alpha\pi z) \int_0^l \int_0^m g(x, y) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{j\pi}{m} y \, dx \, dy \Big\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.19. Avem de determinat funcţia $u(\rho, \theta)$, continuă împreună cu derivatele sale parţiale în domeniul închis $C_R + \widetilde{C}_R$ şi care satisface condiţiile

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \text{ în punctele lui } C_R \qquad (1)$$

şi

$$\left.\frac{\partial u}{y \rho}\right|_{\rho=R} = f(\theta),$$

unde $f(\theta)$ este o funcţie dată, continuă împreună cu derivata sa de ordinul întîi şi cu derivata a doua continuă pe porţiuni.

În plus condiţia necesară pentru ca problema lui Neumann să aibă soluţie este ca integrala funcţiei $f(\theta)$ luată pe frontiera domeniului să fie egală cu zero, deci

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta = 0.$$

Soluţia acestei probleme o putem determina aplicînd metoda lui Fourier, care ne conduce la seria

$$u(\rho, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\rho^n.$$

Coeficienţii A_n şi B_n se determină din condiţia la limită. Avem

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

şi

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = \sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta).$$

Am ajuns la o serie Fourier şi, prin urmare,

$$A_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta; \quad B_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta.$$

Coeficientul A_0 rămîne o constantă arbitrară, deoarece soluţia problemei lui Neumann nu este unică, ea depinde de o constantă aditivă. Rezultă

$$u(\rho, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{\pi n R^{n-1}}\left[\cos n\theta \cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi + \right.$$

$$\left. + \sin n\theta \int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi\right] = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n \cos n(\varphi-\theta)}{nR^{n-1}}\, d\varphi.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să calculăm suma seriei

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{nR^{n-1}} \cos n(\varphi - \theta).$$

Derivăm această relație în raport cu φ:

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{R^{n-1}} \sin n(\varphi-\theta) = -R \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{e^{in(\varphi-\theta)} - e^{-in(\varphi-\theta)}}{2i} =$$

$$= -\frac{R}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi-\theta)}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}e^{-in(\varphi-\theta)}\right)^n\right].$$

Aceste serii sînt convergente și au rația în modul mai mică ca 1, deci

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = -\frac{R}{2i}\left[\frac{\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi-\theta)}}{1-\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi-\theta)}} - \frac{\frac{\rho}{R}e^{-i(\varphi-\theta)}}{1-\frac{\rho}{R}e^{-i(\varphi-\theta)}}\right] =$$

$$= \frac{-\rho \sin(\varphi-\theta)}{1-2\frac{\rho}{R}\cos(\varphi-\theta)+\frac{\rho^2}{R^2}}.$$

De aici, obținem

$$S = -\frac{R}{2}\ln\left(1-2\frac{\rho}{R}\cos(\varphi-\theta)+\frac{\rho^2}{R^2}\right) + C =$$

$$= -\frac{R}{2}\ln[R^2 - 2R\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2)] + C_1, \quad C, C_1 = \text{const.}$$

Cu aceasta avem

$$u(\rho, \theta) = \frac{A_0}{2} - \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\ln[R^2 - 2R\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2]\,d\varphi -$$

$$-\frac{R}{2\pi}C_1\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = \frac{A_0}{2} - \qquad (2)$$

$$-\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\ln[R^2 - 2R\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2]\,d\varphi.$$

Făcînd transformarea $x = \frac{v}{v^2+(w+1)^2}$, $y = \frac{w+1}{v^2+(w+1)^2} - 1$ semiplanul $y \geqslant 0$ se transformă în cercul de centru $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ și rază $\frac{1}{2}$, iar formula (2) ne dă prin transformare

$$u(x, y) = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi)\ln[(x-\varphi)^2 + y^2]\,d\varphi + \frac{A_0}{2}.$$

unde

$$\lim_{(x,\,y)\to\infty} u(x, y) = \frac{A_0}{2} \text{ și } \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = f(x).$$

6.20. Vom căuta soluția de forma

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t), \tag{1}$$

$u_1(x, t)$ fiind o soluție particulară a ecuației neomogene de forma

$$u_1(x, t) = Ax^2 + Bx + C, \tag{2}$$

cu condițiile

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \tag{3}$$

iar $u_0(x, t)$ este o soluție a ecuației omogene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4}$$

cu condițiile

$$u_0|_{x=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{x=l} = 0; \quad u_0|_{t=0} = -u_1|_{t=0};$$
$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0}. \tag{5}$$

Înlocuind (2) în ecuație neomogenă și ținînd seama de (3) obținem

$$u_1 = \frac{bx(2l - x)}{2a^2}. \tag{6}$$

Pentru determinarea soluției ecuației omogene vom utiliza metoda separării variabilelor:

$$u_0(x, t) = S(x)T(t)$$

care înlocuită în (4) conduce la ecuațiile diferențiale cu coeficienți constanți

$$S'' + \frac{\lambda}{a^2} S = 0; \quad T'' + \lambda T = 0.$$

Pentru $\lambda < 0$ avem $S(x) = C_1 e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{a} x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{a} x}$ ($C_1, C_2 =$ const.), iar din condițiile (5) obținem $C_1 = C_2 = 0$ (soluție banală).

Pentru $\lambda = 0$ avem $S(x) = C_1 x + C_2$, iar din (5) rezultă $C_1 = C_2 = 0$.

Pentru $\lambda > 0$, $S(x) = C_1 \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{a} x + C_2 \sin\frac{\sqrt{\lambda}}{a} x$.

Scanned with OKEN Scanner

Din $S(0) = 0$ rezultă $C_1 = 0$, iar din $S'(l) = 0$ obţinem

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{a} C_2 \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{a} l = 0.$$

Pentru a nu ajunge la soluţia banală acceptăm $C_2 \neq 0$, deci $\cos \frac{\sqrt{\lambda}}{a} l = 0$, de unde rezultă

$$\sqrt{\lambda} = \frac{(2n+1)\, a\pi}{2l}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Deci soluţiile corespunzătoare acestor valori ale lui λ vor fi

$$S_n(x) = C_n \sin \frac{(2n+1)\,\pi}{2l} x.$$

Din ecuaţia $T'' + \lambda T = 0$ obţinem

$$T_n(t) = E_n \cos \frac{(2n+1)\,\pi a}{2l} t + F_n \sin \frac{(2n+1)\,\pi a}{2l} t.$$

Deci

$$u_0(x, t) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{(2n+1)\,\pi a}{2l} t + B_n \sin \frac{(2n+1)\,\pi a}{2l} t \right) \sin \frac{(2n+1)\,\pi}{2l} x.$$

Din condiţia $u_0|_{t=0} = -u_1|_{t=0}$ obţinem

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n+1)\,\pi}{2l} x = \frac{bx(x-2l)}{2a^2},$$

relaţie ce reprezintă dezvoltarea funcţiei din membrul doi în serie Fourier, deci coeficienţii sînt

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{b\tau(\tau - 2l)}{2a^2} \sin \frac{(2n+1)\,\pi}{2l} \tau \, d\tau.$$

Din ultima condiţie (5) rezultă $Bn = 0$.
Soluţia ecuaţiei va fi

$$u(x, t) = \frac{bx(2l-x)}{2a^2} + \frac{b}{la^2} \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} \sin \frac{(2n+1)\,\pi x}{2l} \int_0^l \tau(\tau - 2l) \sin \frac{(2n+1)\,\pi\tau}{2l} \cdot d\tau.$$

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Angheluță, Th. *Curs de teoria funcțiilor de variabilă complexă*, ed. II-a. București, 1957.
2. Angheluță, Th. *Exerciții și probleme*. Ed. Universității din Cluj 1957.
3. Arghiriade, E. *Curs de algebră superioară*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1962—1963.
4. Bass, J. *Exercices de mathématiques*. The Macmillan Comp., New York, 1965.
5. Bucur, Gh. E. Câmpu, S. Găină. *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*. Ed. tehnică, București, 1967.
6. Cartan, H. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Paris, 1961.
7. Ciorănescu, N. *Tratat de matematici speciale*. Ed. didactică și pedagogică, București, 1962.
8. Cristescu, R. *Matematici superioare*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1964.
9. Creangă, I. Haimovici, C. *Algebră liniară*. Ed. didactică și pedagogică București, 1962.
10. Demidovici, B. Moron, F. *Éléments de calcul numerique*. Editions Mir — Moscova, 1973.
11. Emmanuel, D. *Lecțiuni de teoria funcțiunilor*, vol. I. Ed. Cultura Națională, București 1924.
12. Evgrafof, M. *Recueil de problèmes sur la théorie des fonctions analytiques*. Ed. Mir — Moscova, 1974.
13. Fadéev, D. Sominski, E. *Recueil d'exercices d'algèbre supérieure*, Ed. Mir — Moscova, 1973.
14. Forsyth-Jacobsthal, DGlen, A. R. Forsyth — W. Jacobsthal. *Lehrbuch der Differentialgleichungen* 2, Aufl. Braunschweig, 1912.
15. Fry, Diff. Equation: Th. C. Fry, *Elementary Differential Ecuations*, New York, 1929.
16. Ganea, T. *Serii trigonometrice*, Ed. tehnică, București, 1964.

Scanned with OKEN Scanner

17. Ghermănescu, M. *Culegere de probleme de ecuații diferențiale*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1963.
18. Ghiunter, N. Cuzmin, R. O. *Culegere de probleme de matematici superioare* vol. 1—3 Ed. tehnică, București, 1953.
19. Goursat. *Cours d'Analyse mathématique* II 4 Aufl. Paris 1925; III—3, Aufl., 1923.
20. Horn, J. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 2 Aufl. Berlin und Leipzig, 1927.
21. Ionescu, D. V. *Ecuații diferențiale și integrale* ed. II, Ed. didactică și pedagogică, București 1972.
22. Kamke, E. *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*, I—II, Akademische verlagsgesellschaft, Gust Portig, K. G., Leipzig, 1959.
23. Knopp, K. *Aufgebensanemlung zur Funktiontheorie*, I — Berlin, 1923.
24. Kuntzmann, J. *Mathematique de la physique et de la technique*, Ed. Hermann, Paris, 1931.
25. Jacob, C. *Curs de matematici superioare*. Ed. tehnică, București, 1960.
26. Marinescu, Gh. *Teoria ecuațiilor diferențiale și integrale*. Ed. didactică și pedagogică, București, 1963.
27. Nicolescu, M. *Analiză matematică*, vol. 1 — 3. Ed. tehnică, București, 1957—1960.
28. Nicolescu, M. Dinculescu, N. Marcus, S. *Manual de analiză matematică* Ed. didactică și pedagogică, București, 1964.
29. Popescu, I. L. Vrânceanu, G. G. Tudor, G. *Probleme de matematici superioare*. Ed. didactică și pedagogică, București, 1964.
30. Roșculeț, M. *Analiză matematică*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1972.
31. Roșculeț, M. și colectiv. *Culegere de probleme de analiză matematică*. Ed. didactică și pedagogică. București, 1968.
32. Sansone, G. Gerretsen, J. *Lectures on the theory of functions of a complex variable*, vol. I. Ed. Noordhoff Groningen, 1960.
33. Schwartz, L. *Methodes mathematiques pour les sciences physiques*. Ed. Hermann, Paris, 1961.
34. Smirnov, V. I. *Curs de matematici superioare*, vol. 1—5. Ed. tehnică, București, 1953—1963.
35. Stoilov, S. *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1954.
36. Stoka, M. *Culegere de probleme de funcții complexe*. Ed. tehnică, București, 1965.
37. Șabac, I. Gh. *Matematici speciale*, vol. 1—2. Ed. didactică și pedagogică, București, 1964—1965.
38. Teodorescu, N. *Metode vectoriale în fizica matematică*, vol. 1—2. Ed. tehnică, București, 1954.
39. Teodorescu, N. Olariu, V. *Ecuațiile fizicii matematice*. Ed. didactică și pedagogică, București, 1970.
40. Urwin, M. K. *Advanced Valculus and vector Field Theory*. Pergamon Press, New York, 1966.
41. Volkovysky, L. Lunts, G. Armanovich, I. *Problems in the theory of functions of a complex variable*. Mir Publichers — Moscova, 1972.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

CAP. 1 ALGEBRĂ LINIARĂ 7
— Elemente de calcul matriceal
— Spaţii liniare
— Operatori liniari
— Forme liniare, biliniare şi pătratice
— Probleme 11
— Soluţii 20

CAP. 2. TEORIA CÎMPULUI 45
— Cîmp scalar. Cîmp vectorial
— Operatori diferenţiaţi în analiza vectorială
— Integrale vectoriale
— Cîmpuri vectoriale particulare
— Probleme 49
— Soluţii 55

CAP. 3. FUNCŢII DE O VARIABILĂ COMPLEXĂ 73
— Funcţii de o variabilă complexă
— Serii
— Funcţii elementare
— Integrale
— Transformări conforme
— Probleme 77
— Soluţii 83

CAP. 4. SERII TRIGONOMETRICE 131
— Serii Fourier
— Integrale şi transformate Fourier
— Probleme 133
— Soluţii 137

CAP. 5. ECUAŢII DIFERENŢIALE 153
— Ecuaţii diferenţiale de ordinul I
— Ecuaţii diferenţiale de ordin superior
— Ecuaţii de tip Bessel
— Sisteme de ecuaţii diferenţiale
— Probleme 159
— Soluţii 167

CAP. 6. ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE . . 214
— Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul I
— Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul II
— Probleme 217
— Soluţii 222

Bibliografie 263

Scanned with OKEN Scanner